MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV156)
Tid: 2011-01-15, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Oskar Hamlet, 0703–088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från duggor och SI hösten 2010 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast måndag 17/1.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv156/1011/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) För vilka reella tal är $\dfrac{x^3-3x^2}{x-2} < 0$? (2p)

   b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \end{cases}$ (2p)

   c) Bestäm **en** (vilken som helst) av lösningarna till ekvationen $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$. (Du får ge svaret i polär form.) (2p)

   d) Funktionen $f(x) = e^{x^2}$ är inverterbar då $x \in (0, \infty)$. Bestäm $(f^{-1})'(e^4)$. (2p)

   e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

   $$\alpha)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \beta)\quad \lim_{x\to 0+} x^{-\ln x} \qquad \gamma)\quad \lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}.$$

   f) En partikel rör sig moturs längs enhetscirkeln (längdenhet meter) med den konstanta farten 2m/s. Hur snabbt ökar partikelns avstånd från punkten $(1, 0)$ i det ögonblick då den passerar igenom punkten $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 3, 1)$, $C = (3, 1, 2)$, $D = (-1, 2, 1)$, $E = (0, 1, 2)$.

   a) Bestäm ekvationen för planet $\mathcal{P}$ genom A, B och C samt arean av triangeln med dessa tre hörn. (3p)

   b) Beräkna avståndet mellan punkten D och planet $\mathcal{P}$. (2p)

   c) Bestäm skärningspunkten mellan $\mathcal{P}$ och linjen genom D och E. (2p)

   (Obs! Om du inte kan göra del a) men ändå vill visa att du vet hur man gör b) och c), så kan du välja ditt egna valfria plan $\mathcal{Q}$ och arbeta med det i stället).

Var god vänd!

---

3. a) Formulera en sats om var att finna förekomsten av extremvärdena för en kontinuerlig funktion på ett slutet, begränsat intervall. (2p)

   b) Bestäm det största och minsta värdet som antas av funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ då $x \in [\frac{1}{2}, 10]$. (4p)

4. Skissera grafen till funktionen (6p)

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

   Ange alla asymptoter och lokala extrempunkter. Konkavitet/konvexitet behöver ej utredas!

5. En triangel ABC har ett hörn i punkten $A = (0, 1)$. Punkten B är en punkt på y-axeln mellan A och origo, och punkten C är en punkt på kurvan $y = x^2$ sådan att kurvans normal genom denna punkt går genom B. Vad är den maximala arean för en sådan triangel? (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) För alla vinklar $\theta \in \mathbb{R}$ gäller $\sin\theta\cos\theta \leq \frac{1}{2}$.

   b) Varje deriverbar funktion är kontinuerlig.

   c) Om funktionen $f(x)$ är både begränsad och deriverbar så är $f'(x)$ också begränsad.

   d) Om $f'(x) > 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så är $f(x)$ inverterbar och $(f^{-1})'(x) < 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

   e) Ekvationen $\cos x = x$ har exakt två lösningar då $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

   f) För alla vektorer $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ gäller att $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b}$.

7. a) Låt $f(x)$ vara en funktion som är definierad på ett öppet intervall (a, b). Definiera vad som menas med att $f(x)$ är *strängt växande* på (a, b). (2p)

   b) Bevisa att om $f(x)$ är deriverbar på (a, b) med en överallt strängt positiv derivata, så är $f(x)$ strängt växande på (a, b). (3p)

VA