Lösningsförslag Inledande matematik E1 – 110824

1) a) Inga x, $\sin y \le 1$ b) $f'(x) = 2+3e^{x} > 0 \Rightarrow f$ strikt växande $\Rightarrow f$ inverterbar $\Rightarrow (f^{-1})$ existerar och f deriverbar $\Rightarrow (f^{-1})'$ existerar c) $\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 0 \\ 2+a & 0 & 0 \end{array}\right)$ $a \ne -2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$, $a=-2 \Rightarrow$ $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = t \in \mathbb{R} \Rightarrow -2t+y=0 \Rightarrow y=2t$ så Lösning är $\Leftrightarrow a \ne -2$, $(x,y)=(0,0)$ och $a=-2$: $(x,y)=t(1,2)$

d) Sätt $t=e^x \Rightarrow t^2+t-6=0 \Rightarrow t=-3, 2 \Rightarrow e^x=-3$ eller $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$ e) $\alpha) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5/e^x + (\ln x)^2/e^x}{1+e^{-x}+3} = \frac{0+0}{0+3} = 0$ $\beta) = (\text{l'Hôp.}) = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{2+\cos x} = \frac{2}{3}$ $\gamma) = (\text{l'Hôp.}) = \frac{(1+\tan^2 2x)2}{2x-1} = \frac{(1+0)2}{0-1} = -2$ f) Har ingen vertikal asymptot eller sned asymptot. Horisontella är $y = \pm 1$ i $\pm\infty$ ty $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \pm\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$

2) Låt $\vec{P_1P_2} = (1,1,1)-(2,1,0) = (-1,0,1)$ och $\vec{P_1P_3} = (-1,-3,1)-(2,1,0) = (-3,-4,1)$ så att $n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2(2,-1,2)$ är en normal och $n = \frac{1}{3}(2,-1,2)$ har längd 1. Så punkterna $(1,1,1) \pm \frac{10}{3}(2,-1,2) = \frac{1}{3}(23,-7,23)$ och $\frac{1}{3}(-17,13,-17)$ ligger på avstånd 10 från planet med de tre punkterna givna så $2(x-x_0)-(y-y_0)+2(z-z_0)=0 \Leftrightarrow 2x-y+2z=D$ är plan parallella med givna planet. Insättning av punkterna ovan med avstånd 10 ger sökta plan $2x-y+2z=33$, $2x-y+2z=-27$

3) $|f(x)-3| \le 1$ för $x<-2$ låt $g(x) = \frac{x^2-x}{x+2}$, $x>-2$. Då gäller att $2 \le g(x) \le 4$

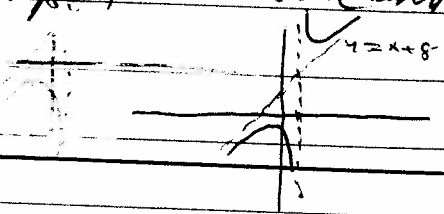
Vi ser också att $f(x) \to +\infty$ då $x \to -2^+$ så något största värde finns ej.

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)-(x^2-3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$$ och $f'(x)=0$ för $x>-2$ bara då $x=-1$ och $f'(x) \le 0$ för $-2<x\le -1$ och $f'(x) \ge 0$ för $x \ge -1$. Så $x=-1$ är en minimipunkt. Då $f(-1) = -2 < f(x)$ då $x<-2$ så gäller att $f(-1)=-2$ är minsta värdet

4) f har lodrät asymptot i $x=2$. Då $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1+6/x+9/x^2)}{x^2(1-2/x)} = 1$ och $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-1\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+6x+9}{x-2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(8+9/x)}{x(1-2/x)} = 8$ så är $y=x+8$ sned asymptot då $x\to\pm\infty$. Derivation ger $f'(x) = \dots = (x+3)(x-7)/(x-2)^2$ Teckenstudietabell

x		-3		2		7	
f'	+	0	−	⦚	−	0	+
f	↗		↘		↘		↗

Så $x=-3$ lokalt max.
$x=7$ lokalt min.



5) Se uppg. 5 101023.

6) a) S b) S c) S d) F e) S f) F

7a) Se boken

b) Av förutsättningarna följer för $h \ne 0$ $0 \le \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \le M|h| \Rightarrow$ $\lim_{h\to 0} 0 \le \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = \left|\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \le \lim_{h\to 0} M|h| \Rightarrow |f'(x)|=0 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow$ f konst.