MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV156)
Tid: 2011-08-24, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Ida Säfström, 0703–088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från duggor och SI hösten 2010 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast torsdag 25/8.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv56/1011/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) För vilka reella tal x är $\sin(\frac{x-5}{3-x}) \geq 2$? (2p)

   b) Låt $f(x) = 2x + 3e^x - 1$. Existerar $(f^{-1})'(2)$? (2p)

   c) Bestäm för varje värde på konstanten a, lösningarna till ekvationssystemet $\begin{cases} ax + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ (2p)

   d) Lös ekvationen $e^{2x} + e^x = 6$. (2p)

   e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

   $$\alpha)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + (\ln x)^{10}}{x + 3e^x} \qquad \beta)\ \lim_{x\to 0} \frac{4x + \sin x}{2x + \sin x} \qquad \gamma)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x^2 - x}$$

   f) Bestäm samtliga asymptoter till kurvan $y = \sin(\frac{\pi|x|}{2(x-1)})$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Planet π innehåller de tre punkterna $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ och $(-1, -3, 1)$. Bestäm alla de plan som ligger på avståndet 10 från π. (6p)

3. Finn om möjligt minimum och maximum av funktionen (6p)
   $$f(x) = \begin{cases} 3 + \sin(\frac{3}{x+2}), & \text{om} \quad \text{x<-2}, \\ \frac{x^2-3}{x+2}, & \text{om} \quad \text{x>-2}. \end{cases}$$

4. Skissera grafen av funktionen (6p)
   $$f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 2}$$
   Ange eventuella asymptoter och lokala extrempunkter. Konvexitet/konkavitet behöver ej utredas.

Var god vänd!

MATEMATIK
Chalmers

---

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i $\mathbf{R}^3$ så är $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.

   b) $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} > 2$

   c) Om z är ett komplext tal sådant att både z^4 och z^7 är reella så måste z självt vara reellt.

   d) Om f är en växande funktion och g en avtagande funktion som är > 0 så är $\dfrac{f}{g}$ växande.

   e) Funktionen $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ är definierad för alla reella x.

   f) Om $h(x) = f(x)g(x)$ så är $h''(x) = f''(x)g(x) + f(x)g''(x)$.

7. a) Formulera medelvärdessatsen. (3p)

   b) Antag att f är en deriverbar funktion sådan att för alla x och y och någon konstant M, gäller $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^2$. Visa att f är konstant. (3p)

VA