Lösningar till Inledande matemtik för E1, (TMV156) 2011-10-22

1. (a) $|x-2| = 4$ betyder att $x - 2 = \pm 4$, vilket ger $x = -2$, $x = 6$.
Svar: $x = -2$, $x = 6$.

(b) Kedjeregeln ger $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Svar: $f'(x) = 2x/(x^2+1)$.

(c) Den utökade koefficientmatrisen A undergår radoperationer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I det första stegt multipliceras rad 1 med -1 och läggs till rad 2 samt med -2 och läggs till rad 3. I det andra subtraheras rad 2 från rad 3 och därefter multipliceras rad 2 med 1/3. Resultatet är en matris på trappstegsform där tredje kolonnen saknar pivot element. Det gör att z är en fri variabel som vi sätter till t: $z = t$. Den andra raden i matrisen ger nu att $y = 1 + t$ och den första att $x = 1 - 2t + (1 + t) = 2 - t$. **Svar:** $x = 2 - t$, $y = 1 + t$, $z = t$, där t är ett godtyckligt reellt tal. (Även andra sätt att ange lösningarna är möjliga.)

(d) Med $v = \arcsin(-5/6)$ har man att $\sin(v) = -5/6$ och att v ligger i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Detta ger, med den trigonometriska ettan, att
$\cos(v) = \pm\sqrt{1-(-5/6)^2}$, där bara det positiva värdet är aktuellt på grund av vinkelns restriktion. Man får $\cos(v) = \sqrt{11/36} = \sqrt{11}/6$.
Svar: $\sqrt{11}/6$.

(e) i. Med $Q = \ln(1+2x)/x$ är Q av typen "0/0" när $x \to 0$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger $Q_1 = (2/(1+2x))/1$ som har gränsvärdet 2, när $x \to 0$. Enligt l'Hospitals regel har Q samma gränsvärde då.
Svar: 2.

ii. Med $Q = (1 - \cos(5x))/x^2$ är Q av typen "0/0" när $x \to 0$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger $Q_1 = 5\sin(5x)/(2x) = (25/2) \cdot \sin(5x)/(5x)$, som enligt standardgränsvärdet $\sin t/t \to 1$, när $t \to 0$, har gränsvärdet 25/2. Enligt l'Hospitals regel har Q samma gränsvärde då.
Svar: 25/2.

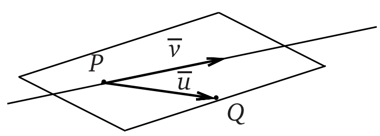
iii. En omskrivning av uttycket ger $Q = (\arctan x - \pi/2)/(1/x)$, som är av typen "0/0" när $x \to \infty$. Derivering av täljare och nämnare för sig ger
$Q_1 = (1/(1+x^2))/(-1/x^2) = -x^2/(1+x^2)$ som har gränsvärdet -1 när $x \to \infty$. Enligt l'Hospitals regel har Q samma gränsvärde då.
Svar: -1.

(f) Derivering av $y^3/x + x^2y = -4$ ger (tänk på y som en funktion av x)
$(3y^2y'x - y^3)/x^2 + 2xy + x^2y' = 0$. Samlas allt som innehåller y' i vänstra ledet och resten i det högra får man

$$y'\left(\frac{3y^2x}{x^2} - x^2\right) = \frac{y^3}{x} - 2xy.$$

Eftersom $x = -2$, $y = -2$ ger detta $y' \cdot (-2) = -10$, eller $y' = 5$.
Tangenlinjen har alltså riktningskoefficient 5 och går genom $(-2, -2)$. Därför är $y = 5(x+2) - 2 = 5x + 8$ en ekvation för tangentlinjen.
Svar: $y = 5x + 8$.

2. (a) De givna ekvationerna för linjen är på standrad form så vi kan avläsa en riktningvektor $\overline{v} = (5, 2, 1)$ och en punkt $P = (2, 1, 1)$ på linjen. Den ginva punkten $Q = (3, -1, -2)$ i planet ger vektorn $\overline{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, -2, -3)$ som är parallell med planet liksom $\overline{v}$.



En normal till planet ges av

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

som ger att $\overline{n} = (1, -4, 3)$ är en normal till planet. Det har därför en ekvation $x - 4y + 3z = d$. Det går genom P, så $2 - 4 + 3 = d$.

Svar: $x - 4y + 3z = 1$.

(b) Eftersom $1 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 2 \neq 1$, löser punkten $(1, 2, 3)$ inte planets ekvation.

Svar: Nej.

(c) Den parametriserade linjen har riktningsvektor $\overline{w} = (1, -4, 3)$, som är en normal till planet enligt tidigare uträkning. Alltså är linjen vinkelrät mot planet.

Svar: Ja.

3. (a) Derivering ger $f'(x) = 7x^6 + 5x^4 = x^4(7x^2 + 5)$, som är > 0 utom i $x = 0$. Det ger att f är växande (strängt växande) och därför inverterbar.

(b) Derivering av $f(f^{-1}(x)) = x$ ger $f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$, som leder till $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$. Vi bestämmer $f^{-1}(5)$ genom att sätta $f^{-1}(5) = t$ och får $5 = f(f^{-1}(5)) = f(t) = t^7 + t^5 + 3$, som löses av $t = 1$ ("gissas"). Det ger $f^{-1}(5) = 1$ och vi får $(f^{-1})'(5) = 1/f'(1) = 1/12$, enligt tidigare beräkning av f'.

Svar: $1/12$.

4. Logaritmen är definierad för alla x sådana att $1 - 2x > 0$, dvs alla $x < 1/2$. Arcus-funktionen är definierad för alla x. Det ger att **definitionsmängden** är intervallet $(-\infty, 1/2)$.

Funktionen är kontinuerlig, så enda möjliga lodräta asymptoten är $x = 1/2$. Man har $f(x) \to -\infty$, när $x \to 1/2^-$, så $x = 1/2$ är en **lodrät asymptot**.

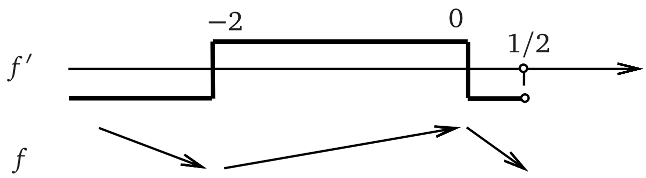
Sned asymptot kan bara finnas när $x \to -\infty$. En eventuell sådan har riktningskoefficient k, som ges av gränsvärdet av $f(x)/x$, när $x \to -\infty$. Man har
$f(x)/x = \ln(1 - 2x)/x + 2\arctan(x)/x \to 0$, när $x \to -\infty$, för en positiv potens av x (i detta fallet $x = x^1$) dominerar över en logaritm och $\arctan(x)$ har gränsvärdet $-\pi/2$ då. Detta ger $k = 0$. Vidare gäller att $f(x) - kx = f(x) \to \infty$, när $x \to -\infty$.

Alltså finns ingen **sned asymptot**.

Derivering ger

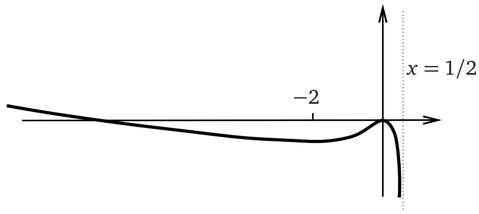
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2}{1 - 2x} + \frac{2}{1 + x^2} = \frac{-2(1 + x^2) + 2(1 - 2x)}{(1 - 2x)(1 + x^2)} = \\ &= \frac{-2(x^2 + 2x)}{(1 - 2x)(1 + x^2)} = \frac{-2x(x + 2)}{(1 - 2x)(1 + x^2)}. \end{aligned}$$

Detta ger två **kritiska punkter**: -2 och 0. Teckenstudium:



Detta ger att -2 är en **lokal minimi-punkt** och 0 en **lokal maximipunkt**. Man har $f(-2) = \ln(5) + 2\arctan(-2)$ och $f(0) = 0$, så $f(-2)$ är negativt. Utöver $x = 0$ har f ett **nollställe** mindre än -2 (för $f(x) \to \infty$, när $x \to -\infty$).

En skiss av grafen:



Värdemängden är mängden av alla reella tal.

5. **a)** Antag att f är definierad för $I \setminus \{a\}$ där I är ett intervall runt a. Då gäller att

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

b) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och tag $\delta = \min[1, \varepsilon/7]$. Vi vill uppskatta $|x^2 - 9| = |(x+3)(x-3)| = |x+3||x-3|$. Om nu $|x-3| < \delta$ så gäller alltså $|x-3| < \delta \leq 1$ som ger att $2 < x < 4 \Rightarrow 5 < x+3 < 7 \Rightarrow |x+3| < 7$. Alltså gäller för givet $\varepsilon > 0$ att vi kan ta $\delta = \min[1, \varepsilon/7]$ och då gäller med detta val av δ att om $|x-3| < \delta$ så har vi att $|x^2 - 9| = |(x+3)(x-3)| = |x+3||x-3| < 7|x-3| < 7\delta \leq 7(\varepsilon/7) = \varepsilon$; d v s definitionen av att $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ är uppfylld.

6. (a) Om θ är ett argument för a har lösningarna till ekvationen argument $\theta/3$, $\theta/3 + 2\pi/3$ och $\theta/3 - 2\pi/3$. De kan inte alla vara argument för vinklar i samma kvadrant, för skillnaden mellan dem är $2\pi/3$.

   Svar: Falskt.

   (b) Derivering ger $f'(x) = 1 + \ln(x)$ och $f''(x) = 1/x$, som är > 0, när $x > 0$. Alltså är f konvex då.

   Svar: Sant.

   (c) Om man sätter $f(x) = x - \ln(x+1)$, har man $f'(x) = 1 - 1/(x+1) = x/(x+1)$, som bara växlar tecken i $x = 0$, när $x > -1$. Man har att f' är negativ när $-1 < x < 0$ och positiv när $0 < x$. Detta ger att f har ett minsta värde i $x = 0$. Alltså $f(x) \geq 0$, när $x > -1$. Av detta följer att $\ln(x+1) \leq x$ då.

   Svar: Sant.

   (d) En kontinuerlig funktion antar ett största och ett minsta värde på ett slutet bergränsat intervall. Enligt satsen om mellanliggande värde är värdemängden också ett interval och därmed ett slutet begränsat intervall. Intervallet $(0, 1)$ är inte ett sådant intervall. **Svar:** Falskt.

   (e) Medelvärdessatsen ger att $f(2) - f(1) = f'(c)(2-1) = f'(c)$, för något c i intervallet $(0, 1)$. Eftersom $f(2) - f(1) = 24 - 15 = 9$ stämmer påståendet.

   Svar: Sant.

   (f) Definitionsmängden till f är mängden av alla x sådana att $(x-2)(x-5) \geq 0$. Det ger att f är definierad när $x < 2$ och när $x > 5$.

   För g gäller att båda termer i summan ska vara definierade för att g ska vara det. Det ger att $2 < x$ och $5 < x$ samtidigt. Funktionen g är alltså definierad (bara) när $x > 5$.

   Svar: Sant.

7. Se kursboken.