

Lösningar till Inledande matematik för E1, (TMV157) 2012-10-27

1. (a) Systemets utökade koefficientmatris utsätts för radoperationer:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Rad 1 läggs till rad 2, Rad 3 minskas med 3x rad 1:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Från rad 3 dras 3x rad 2:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Detta ger att  $z$  är en fri variabel, så vi kan sätta  $z = t$ . Andra raden ger då  $y = 1 - t$  och första att  $x = 1 + (1 - t) + t = 2$ .

**Svar:**  $x = 2$ ,  $y = 1 - t$  och  $z = t$ , där  $t$  är ett godtyckligt reellt tal.

- (b) Låt  $\bar{w}$  vara den givna vektorn. Om man t.ex. sätter

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

så är  $\bar{u} \cdot \bar{w} = 6 - 6 + 0 = 0$  och  $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0 + 6 - 6 = 0$ , så så väl  $\bar{u}$  som  $\bar{v}$  är vinkelräta mot  $\bar{w}$ . För att  $\bar{u}$  och  $\bar{v}$  ska vara parallella ska det finnas en skalär  $k$ , så att  $\bar{v} = k\bar{u}$ , d.v.s  $0 = 3k$ ,  $1 = -k$  och  $2 = 0 \cdot k$ . Den första av dessa ekvationer ger  $k = 0$ , som inte fungerar i den andra. Alltså är  $\bar{u}$  och  $\bar{v}$  inte parallella.

**Svar:** T.ex.  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- (c) Polär framställning ger  $-8i = 2^3 \cdot e^{-i\pi/2}$ , vilket ger att  $z = 2^{3/2} \cdot e^{-i\pi/4}$  är en lösning till ekvationen. Vi har  $2^{3/2} \cdot e^{-i\pi/4} = 2\sqrt{2}(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}) = 2 - 2i$ .

**Svar:** T.ex.  $z = 2 - 2i$ .

- (d) Man har  $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$  och  $f''(x) = e^{-x}(-1 + x - 1) = e^{-x}(x - 2)$ , som är positiv precis när  $x > 2$ . Därmed är  $f$  konvex då  $x \in (2, \infty)$

**Svar:**  $(2, \infty)$ .

- (e) i. Förkortning med  $e^x$  ger  $f(x) = (1 + 2xe^{-x} - e^{-x}) / (2 + xe^{-x} - 2e^{-x})$ . Eftersom  $xe^{-x} \rightarrow 0$  och  $e^{-x} \rightarrow 0$ , när  $x \rightarrow \infty$ , gäller att  $f(x) \rightarrow (1 + 0 - 0) / (2 + 1 - 0) = 1/2$  då.

**Svar:**  $1/2$ .

- ii. Förkortning med  $x$  ger  $f(x) = (e^x/x + 2 - 1/x) / (2e^x/x + 1 - 2/x)$ . Eftersom  $e^x/x \rightarrow 0$  och  $1/x \rightarrow 0$ , när  $x \rightarrow -\infty$ , gäller att  $f(x) \rightarrow (0 + 2 - 0) / (0 + 1 - 0) = 2$  då.

**Svar:**  $2$ .

- iii. Gränsvärde är av typen "0/0". Sätt  $Q_1 = (e^x + 2x - 1)' / (2e^x + x - 2)'$ , d.v.s  $Q_1 = (e^x + 2) / (2e^x + 1)$ , som har gränsvärdet  $(1 + 2) / (2 + 1) = 1$ , när  $x \rightarrow 0$ . L'Hospitals regel ger att även  $f(x)$  har gränsvärdet  $1$ , när  $x \rightarrow 0$ .

**Svar:**  $1$ .

- (f) Derivering av de båda leden ger

$$8y^3y' + 3x^2 = 2xy^3 + 3x^2y^2y'.$$

Insättning av  $x = -1$  och  $y = 1$  ger  $8y' + 3 = -2 + 3y'$ , som ger  $y' = -1$  och att tangenten har riktningskoefficienten  $-1$ . Tangenten går genom punkten  $(-1, 1)$  och har alltså ekvationen  $y = 1 - 1(x + 1)$ .

**Svar:**  $y = -x$ .

2. (a) Från ekvationen för planet får vi att det har normalen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

som också är en riktningsvektor för linjen. Den ska gå genom punkte  $(2, -3, 4)$ , vilket ger att den har parameterframställningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Som ger parameterframställningen  $x = 2 + 3t$ ,  $y = -3 + 6t$ ,  $z = 4 + 2t$ , där  $t$  är ett godtyckligt reellt tal. Ur detta löser vi ut  $t$  och får

$$(t =) \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-4}{2},$$

som är en parameterfri framställning av linjen.

**Svar:**  $x = 2 + 3t$ ,  $y = -3 + 6t$ ,  $z = 4 + 2t$ , där  $t$  är ett godtyckligt reellt tal, respektive  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-4}{2}$ .

- (b) Sätt  $A = (2, -3, 4)$  och  $B = (3, -2, 4)$  och  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . Aståndet kan så beräknas som (med  $\vec{v}$  som i lösningen till a))  $d = |\vec{u} \times \vec{v}|/|\vec{v}|$ . Vi har

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -2-(-3) \\ 4-4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Detta ger  $d = \sqrt{4+4+9}/\sqrt{9+36+4} = \sqrt{17}/7$

**Svar:**  $\sqrt{17}/7$ .

3. Funktionens definitionsmängd består av alla reella tal eftersom nämnaren saknar nollställe. Eftersom funktionen är kontinuerlig kommer värdemängden därför att vara ett intervall.

Vi har

$$f(x) = \frac{(x^2 + 4) + 2x + 3}{x^2 + 4} = 1 + \frac{2x + 3}{x^2 + 4}$$

Detta ger att  $f(x) \rightarrow 1$ , när  $x \rightarrow \pm\infty$ , eftersom polynomet i täljaren i det återstående bråket är av lägre grad än det i nämnaren.

Derivering av omskrivningen av  $f(x)$  ger

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 4) - (2x + 3) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 6x - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2(4 - 3x - x^2)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2(1-x)(4+x)}{(x^2 + 4)^2}$$

Teckenstudium ger att  $f$  är växande på  $[-4, 1]$  och avtagande på  $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ . Vi har  $f(-4) = 1 + (-5)/20 = 3/4$  och  $f(1) = 1 + (5/5) = 2$ . Eftersom  $f(x) \rightarrow 1$ , när  $x \rightarrow \pm\infty$ , ger detta att  $f(x)$  har ett minsta värde  $3/4$  och ett största värde  $2$ .

**Svar:** Värdemängden är  $[3/4, 2]$ .

4. Definitionsmängden till  $f(x)$  består av alla reella tal.

Eftersom  $\arctan t \rightarrow \pi/2$ , när  $t \rightarrow \infty$  och  $\arctan t \rightarrow -\pi/2$ , när  $t \rightarrow -\infty$ , gäller att  $f(x) \rightarrow 0$ , när  $x \rightarrow \pm\infty$ . Den enda sneda/horisontella asymptoten är  $y = 0$ . Lodrät asymptot saknas.

Derivering (med kedjeregeln) ger

$$f'(x) = \frac{3}{1+9x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{3(1+x^2) - (1+9x^2)}{(1+9x^2)(1+x^2)} = \frac{2(1-3x^2)}{(1+9x^2)(1+x^2)} = \frac{2(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{(1+9x^2)(1+x^2)}.$$

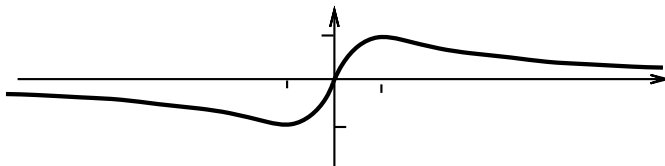
Det betyder att  $f(x)$  är avtagande på  $(-\infty, -1/\sqrt{3}] \cup [1/\sqrt{3}, \infty)$  och växande på  $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ . Eftersom  $f(x) \rightarrow 0$ , när  $x \rightarrow \pm\infty$ , ger detta att  $f(x)$  har sitt största värde i  $1/\sqrt{3}$ , som alltså är en (lokal) max-punkt och sitt minsta värde i  $-1/\sqrt{3}$ .

Vi har  $f(1/\sqrt{3}) = \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6$ .

Vi konstaterar att  $f(x)$  är **udda** ( $f(-x) = -f(x)$ ) och har  $f(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$ .

Detta ger att värdemängden till  $f(x)$  är  $[-\pi/6, \pi/6]$ .

Informationen ovan leder till följande skiss



**Svar** Definitionsmängden består av alla reella tal. Värdemängden är  $[-\pi/6, \pi/6]$ . Den enda asymptoten är  $y = 0$ . Funktionen är avtagande på  $(-\infty, -1/\sqrt{3}] \cup [1/\sqrt{3}, \infty]$  och avtagande på  $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ . Den är udda och har en max-punkt i  $1/\sqrt{3}$  och en min-punkt i  $-1/\sqrt{3}$ .

5. a) Antag att  $f$  är definierad för  $I \setminus \{a\}$  där  $I$  är ett intervall runt  $a$ . Då gäller att

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

b) Låt  $\varepsilon > 0$  vara givet och tag  $\delta = \min[1, \varepsilon/7]$ . Vi vill uppskatta  $|x^2 - 9| = |(x+3)(x-3)| = |x+3||x-3|$ . Om nu  $|x-3| < \delta$  så gäller alltså  $|x-3| < \delta \leq 1$  som ger att  $2 < x < 4 \Rightarrow 5 < x+3 < 7 \Rightarrow |x+3| < 7$ . Alltså gäller för givet  $\varepsilon > 0$  att vi kan ta  $\delta = \min[1, \varepsilon/7]$  och då gäller med detta val av  $\delta$  att om  $|x-3| < \delta$  så har vi att  $|x^2 - 9| = |(x+3)(x-3)| = |x+3||x-3| < 7|x-3| < 7\delta \leq 7(\varepsilon/7) = \varepsilon$ ; d v s definitionen av att  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$  är uppfylld.

6. (a)  $f(x) = \arctan(x)$  är strängt växande men  $f(x)$  går inte mot  $\infty$ , när  $x \rightarrow \infty$ , så påståendet är falskt.

**Svar:** Falskt.

- (b) Vi har  $f'(x) = 2/x - 1/(x+1) = (x+2)/(x(x+1))$ , som är  $> 0$ , när  $x > 0$ . Det ger att  $f(x)$  är strängt växande på  $(0, \infty)$ .

**Svar:** Sant.

- (c)  $f(x) = 1/x$ ,  $x > 0$  är konvex och strängt avtagande, så påståendet stämmer.

**Svar:** Sant.

- (d) Vi har  $f(x) = \ln x / \ln 2$ , vilket ger  $f'(x) = 1/(x \ln 2)$ . Tangentlinjen i punkten  $(a, f(a))$  har därför ekvationen  $y = \ln a / \ln 2 + (x - a)/(a \ln 2)$ . Den går genom origo när  $0 = \ln a / \ln 2 - 1 / \ln 2$ , d.v.s när  $a = e$ .

**Svar:** Sant.

- (e) Vektorerna mellan origo och punkten  $(1, 0, 0)$  respektive origo och  $(0, 1, 0)$  är vinkelräta mot varandra. Deras kryssprodukt är vektorn mellan origo och  $(0, 0, 1)$  som inte är nollvektorn.

**Svar:** Falskt.

- (f) Om  $z_0^n = 1$ , så är  $|z_0|^n = 1$ , vilket ger  $|z_0| = 1$ . Därmed är  $z_0 \bar{z}_0 = |z_0|^2 = 1$ . Om vi multiplicerar båda sidor i  $z_0 z_0^{n-1} = 1$  med  $\bar{z}_0$  får vi därför  $z_0^{n-1} = \bar{z}_0$ .

**Svar:** Sant.