Lösningar till Inledande matemtik för E1, (TMV157) 2013-01-19

1. (a) Vi skriver olikheten $0 > x+1/x-2$ och skriver därefter högra ledet på gemensamt bråkstreck och faktoriserar:

$$0 > x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}.$$

Vi ser att täljaren alltid är ≥ 0, så tecknet på högra ledet avgörs helt av nämnaren. Detta ger

Svar: När $x < 0$.

(b) Systemets utökade koefficientmatris utsätts för radoperationer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & (4+a) & -2 \\ -2 & 2 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & (3+a) & -2 \end{pmatrix}$$ Rad 1 x2 läggs till rad 2, Rad 3 minskas med rad 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & (4+a) & -2 \\ 0 & 2 & (15+2a) & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ Från rad 3 dras rad 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & (4+a) & -2 \\ 0 & 2 & (15+a) & -5 \\ 0 & 0 & (-16-2a) & 5 \end{pmatrix}$$

Detta ger en matris på trappstegsform med pivotelement i sista kolonnen precis när $-16-2a = 0$, dvs när $a = -8$. Precis då saknar ekvationssystemet lösning.

Svar: $a = -8$.

(c) Sätt det givan talet till z. Vi har då $|z| = \sqrt{((-4)^2 + (\sqrt{48})^2)} = \sqrt{(64)} = 8$. För att bestämma ett argument θ för z ska vi hitta en lösning till systemet

$$\begin{cases} \cos\theta &= \mathrm{Re}(z)/|z| = -4/8 = -1/2 \\ \sin\theta &= \mathrm{Im}(z)/|z| = \sqrt{48}/8 = 4\sqrt{3}/8 = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

En lösning ges av $\theta = 2\pi/3$.

Svar: Beloppet är 6 och $2\pi/3$ ett argument.

(d) Vektorn $\overrightarrow{AB}$ har koordinater

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De två vektorern är vinkelräta mot varandra precis när deras skalärprodukt är 0. Detta ger ekvationen

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 + a - 2.$$

Detta ger $a = -2$.

Svar: När $a = -2$.

(e) Vi söker en parameterframställning av linjen och sätter

$$t = \frac{x+4}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{5}$$

Vi löser ut x, y och z och får $x = -4 + 2t$, $y = 3t$, $z = 2 + 5t$, som i planets ekvation ger

$$2 = 2(-4 + 2t) + 3t - 3(2 + 5t) = -14 - 8t,$$

Vilket ger $t = -2$ och därmed skärningspunkten $(-4 + 2(-2), 3(-2), 2 + 5(-2))$

Svar: I punkten med koordinater $(-8, -6, -8)$

(f) Vi löser ekvationen $f(x) = 4$, dvs $x = 4(x-1)$, som ger $x = 4/3$. Vi använder f^{-1} på båda sidor av $f(4/3) = 4$ och får $4/3 = f^{-1}(4)$.
Svar: $f^{-1}(4) = 4/3$.

(g) Derivering ger enligt kedjregeln

$$f'(x) = \frac{1}{1+(2x+1)^2} \cdot D(2x+1) = \frac{2}{1+(2x+1)^2},$$

eftersom $D(\arctan t) = 1/(1+t^2)$. Med $x = -1$ får vi $f'(-1) = 2/2 = 1$.
Svar: 1.

2. (a) Gränsvärdet är av typen "$\infty - \infty$". Räkneregler för logaritmer ger

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x - 2) - 2\ln x = \ln\Big(\frac{3x^2+2x-2}{x^2}\Big).$$

Eftersom $(3x^2 - 2x - 2)/x^2 \to 3$, när $x \to \infty$ gäller att $f(x) \to \ln 3$ då.
Svar: $\ln 3$.

(b) Gränsvärdet är av typen "0/0". Förlänging med konjugerat uttryck $(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{3x})$till täljaren ger

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{3x}}{x-2} = \frac{x^2+2-3x}{(x-2)(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{3x})} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{3x})} = \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{3x}}. \end{aligned}$$

Av detta följer att $f(x) \to 1/(\sqrt{6}+\sqrt{6}) = \sqrt{6}/12$, när $x \to 2$.
Svar: $\sqrt{6}/12$

(c) Gränsvärdet är av typen "0/0". Vi sätter

$$Q = \frac{x\ln(1+x^2) - \sin x + x}{\arctan x - x}.$$

Derivering av täljare och nämnare för sig ger

$$Q_1 = \frac{\ln(1+x^2) + \frac{x \cdot 2x}{1+x^2} - \cos x + 1}{\frac{1}{1+x^2} - 1},$$

som efter förläning med $1 + x^2$ blir

$$Q_1 = \frac{(1+x^2)\ln(1+x^2) + 2x^2 - (1+x^2)(\cos x - 1)}{-x^2}$$

som också ger ett gränsvärde av typen "0/0", när $x \to 0$. Ytterligare derivering av täljare och nämnare för sig ger

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{2x\ln(1+x^2) + 2x + 4x - 2x(\cos x - 1) + (1+x^2)\sin x}{-2x} = \\ &= -\ln(1+x^2) - 3 + (\cos x - 1) - \frac{1+x^2}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \to \\ &\to -\ln(1) - 3 + (1-1) - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{7}{2}, \end{aligned}$$

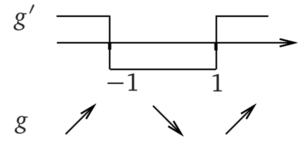
när $x \to 0$. L'Hospitals regel ger nu att Q_1 och (sedan) Q också har detta gränsvärde.
Svar: $-7/2$.

3. Funktionen f är definierad för alla reella tal och har derivata $g(x) = f'(x) = \dfrac{-12x}{(x^2+3)^2}$.

Vi söker x så att $g(x)$ är minst möjligt. Vi har

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-12(x^2+3)^2 + 12x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \frac{-12(x^2+3) + 48x^2}{(x^2+3)^3} = \\ &= \frac{36(x-1)(x+1)}{(x^2+3)^3} \end{aligned}$$

Detta ger följande tecknstudium av $g'(x)$:



Eftersom $g(x) \to 0$ när $x \to -\infty$ ger detta att g har sitt minsta värde i $x = 1$. Punkten på grafen till f där tangenten har minst lutning är alltså $(1, f(1)) = (1, 3/2)$.

Svar I punkten $(1, 3/2)$.

4. Definitionsmängden till $f(x)$ består av alla reella tal utom $x = 1$. Vi har att $x/(1-x)^3 \to \infty$ när $x \to 1^-$ och $\to -\infty$, när $x \to 1^+$. Eftersom $e^t \to \infty$ när $t \to \infty$ och $\to 0$ när $t \to -\infty$ gäller

$$f(x) \to \begin{cases} \infty & \text{när} \quad x \to 1^- \\ 0 & \text{när} \quad x \to 1^+ \end{cases}$$

Detta visar att $x = 1$ är en lodräta asymptot.

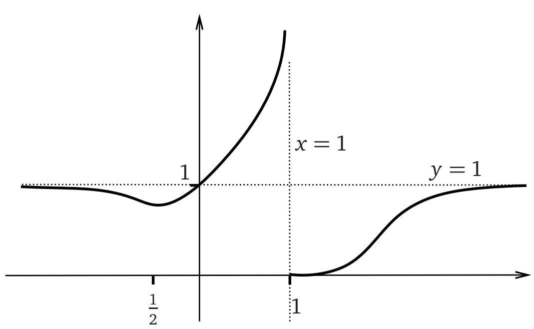
När $x \to \pm\infty$ gäller att $x/(1-x)^3 \to 0$, vilket ger att $f(x) \to e^0 = 1$ då. Vi har att $y = 1$ är en horisontell asymptot.

Vi undersöker när f är växande respektive avtagande med hjälp av tecknet på f'. Eftersom exponentialfunktionen alltid är > 0 gäller att $f(x) > 0$ för alla x. Vi deriverar:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot D\Big(\frac{x}{(1-x)^3}\Big) = f(x) \cdot \frac{(1-x)^3 - x \cdot 3(1-x)^2 \cdot (-1)}{(1-x)^6} = \\ &= f(x) \cdot \frac{1+2x}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

Vi konstaterar att f' är < 0, när $x < -1/2$ och > 0 annars. Detta visar att f är avtagande när $x < -1/2$ och växande på $[-1/2, 1)$ samt $(1, \infty)$, så $x = -1/2$ är en lokal minpunkt till f.

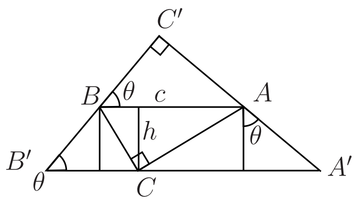
Informationen sammanfattas i fölande skiss av grafen till f :



Vi ser att värdemängden är $(0, \infty)$.

Svar Definitionsmängden består av alla reella tal utom 1. Värdemängden är $(0, \infty)$. Linjen $x = 1$ är en lodrät asymptot och $y = 1$ en vågrät (i både ∞ och $-\infty$). Funktionen är avtagande på $(-\infty, -1/2]$ samt växande på intervallen $[-1/2, 1)$ samt $(1, \infty)$. Talet $-1/2$ är en lokal minpunkt till f, som saknar så väl största som minsta värde.

5. Vi inför sidan c och höjden h som i figuren.och höjden h. Vi har att $h < c/2$, eftersom triangeln $\triangle ABC$ inte är liksidig. Triangeln $\triangle ABC$ har då arean $hc/2$.
Vi inför vikeln θ vid hörnet B' och ser att den vinkeln förekommer på ytterligare två ställen i figuren och att θ kan väljas till vilken vinkel som helst i intervallet $(0, \pi/2)$.



Med hjälp av θ kan vi beräkna

$$\begin{aligned} |B'C'| &= \frac{h}{\sin\theta} + c\cos\theta \\ |A'C'| &= \frac{h}{\cos\theta} + c\sin\theta \end{aligned}$$

Detta ger att arean av $\triangle A'B'C'$ är hälften av

$$f(\theta) = |B'C'| \cdot |A'C'| = \frac{h^2}{\sin\theta\cos\theta} + 2hc + c^2\sin\theta\cos\theta,$$

som vi med formeln $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ förenklar till

$$\frac{2h^2}{\sin 2\theta} + 2hc + \frac{c^2}{2}\cdot\sin 2\theta.$$

Vi sätter $v = 2\theta$ och får att vi ska bestämma v i intervallet $(0, \pi)$, så att

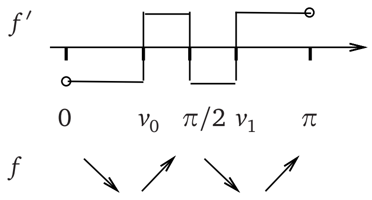
$$f(v) = \frac{2h^2}{\sin v} + 2hc + \frac{c^2}{2}\cdot\sin v$$

är minst möjligt. Vi löser detta genom att derivera

$$\begin{aligned} f'(v) &= -\frac{2h^2\cos v}{\sin^2 v} + \frac{c^2}{2}\cdot\cos v = \frac{\cos v}{2\sin^2 v}\cdot(c^2\sin^2 v - 4h^2) = \\ &= \frac{\cos v}{2\sin^2 v}\cdot(c\sin v - 2h)(c\sin v + 2h) \end{aligned}$$

I detta uttryck växlar $\cos v$ tecken i $v = \pi/2$ och $c\sin v - 2h$ när $\sin v = 2h/c$, som är < 1, eftersom $h < c/2$. Det betyder att vi får två vinklar $v_0 < \pi/2 < v_1 < \pi$ där f' växlar tecken och $\sin v_0 = \sin v_1 = 2h/c$.

Detta ger följande teckenstudium av f' :



Detta ger att f:s minsta värde är $f(v_0) = f(v_1)$ som vi beräknar genom att utnyttja att $\sin v_0 = 2h/c$:

$$f(v_0) = \frac{2h^2}{\sin v_0} + 2hc + \frac{c^2}{2}\cdot\sin v_0 = hc + 2hc + hc = 4hc.$$

Den minsta möjliga arean på den stora rätvinkliga trianglen är hälften av detta, dvs $2hc$, som är 4 gånger den givna triangelns area ($hc/2$).

Svar: Fyra gånger så stor.

6. (a) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{när} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{när} \quad x = 0 \end{cases}$$

är kontinuerlig även i $x = 0$ för $|f(x)| \leq |x|$ (eftersom $|\sin(1/x)| \leq 1$), så $f(x) \to 0$ när $x \to 0$. I varje omgivning till 0 antar f så väl positiva som negativa värden. T.ex. har vi $f(2/(n\pi)) = 2/(n\pi)$, när det naturliga talet n har resten 1 vid division med 4, men $f(2/(n\pi)) = -2/(n\pi)$, när n har resten 3 vid division med 4.

Svar: Falskt.

(b) Medelvärdessatsen ger ett tal s i intervallet $[x, x+1]$, så att

$$f'(s) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x).$$

När $x \to \infty$ gäller även att $s \to \infty$, så $f(x+1) - f(x) = f'(s) \to 0$, enligt förutsättning.

Svar: Sant.

(c) Om $\vec{v}$ har längd 1, så har $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$ längd 0.

Svar: Falskt.

(d) För komplexa tal z och w gäller att $|zw| = |z| \cdot |w|$, så om både z och w har belopp 1 så har även zw belopp 1.

Svar: Sant.

(e) Vi har

$$f'(x)) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2},$$

så tangenten genom $(a, f(a))$ har ekvationen

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = \frac{-12a}{(a^2+3)^2} \cdot (x-a) + \frac{6}{a^2+3}.$$

Den ska gå genom $(0, 1)$, vilket ger

$$1 = \frac{12a^2}{(a^2+3)^2} + \frac{6}{a^2+3},$$

som ger oss $(a^2+3)^2 = 12a^2 + 6(a^2+3)$. Med $t = a^2$ blir det $(t+3)^2 = 18t + 18$, eller $t^2 - 12t - 9 = 0$, som har lösningarna $a^2 = t = 6 \pm \sqrt{36+9}$, där bara $a^2 = 6 + \sqrt{45}$ är möjlig. Detta ger att vi ska välja $a = \pm\sqrt{6 + \sqrt{45}}$. Det finns alltså två tangenter som går genom $(0, 1)$.

Svar: Sant.

(f) För vinklar x, $0 < x < \pi/2$, i första kvadranten är $\cos x - 1$ negativt medan $\cos x + 1$ är positivt. Vänstra ledet är alltså negativt då, medan det högra är positivt.

Svar: Falskt.