MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2013-01-19, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Magnus Önnheim, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2012 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter skrivningstidens slut.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1213/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
   Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) För vilka x gäller det att $x + \dfrac{1}{x} < 2$? (2p)

   b) För vilket värde på parametern a saknar ekvationssystemer (2p)

$$\begin{cases} x \phantom{{}+2y} + (4+a)z = -2 \\ -2x + 2y + 7z = -1 \\ x + 2y + (3+a)z = -2 \end{cases}$$

   lösningar?

   c) Bestäm belopp och argmuent till det komplexa talet $-4 + \sqrt{48}i$. (2p)

   d) För vilket värde på a är vektorn med koordinater $(1, a, 2)$ vinkelrät mot vektorn $\overrightarrow{AB}$, där A och B är punkterna med koordinater $(0, 2, 3)$ respektive $(4, 3, 2)$? (2p)

   e) I vilken punkt skär linjen med ekvationer $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{5}$ planet med ekvation $2x + y - 3z = 2$? (2p)

   f) Funktionen $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ är inverterbar. Bestäm $f^{-1}(4)$. (2p)

   g) Bestäm $f'(-1)$ när $f(x) = \arctan(2x + 1)$. (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Beräkna följande gränsvärden: (2p+2p+2p)

   a) $\lim_{x\to\infty} \Big(\ln(3x^2 + 2x - 2) - 2\ln x\Big)$

   b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{3x}}{x-2}$

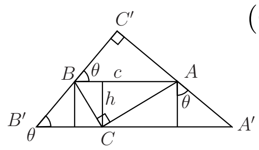
   c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+x^2) - \sin x + x}{\arctan x - x}$

Var god vänd!

3. I vilken punkt på grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$ har tangenten minst lutning? (6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = e^{\frac{x}{(1-x)^3}} = \exp\left(\dfrac{x}{(1-x)^3}\right)$. Ange också alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet). (6p)

5. En fix rätvinklig triangel ABC, som inte är liksidig, är given i planet som i figuren. Kring den ritas ytterligare en rätvinklig triangel $A'B'C'$, så att de båda hypotenusorna är parallella och hörnen i den mindre ligger på den störres sidor. Vilken är den minsta area den större kan ha i förhållande till den mindre? Ledning: Vi inför sidan c, höjden h och vinkeln θ vid hörnet B' som i figuren. Triangeln $\triangle ABC$ har då arean $hc/2$. Uttryck arean av $\triangle A'B'C'$ i termer av de införda storheterna. (6p)



6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om funktionen f är kontinuerlig på intervallet $[0, 2)$ så måste f ha ett lokalt extremvärde i 0.
   b) Om $f'(x) \to 0$, när $x \to \infty$, så gäller att $f(x+1) - f(x) \to 0$, när $x \to \infty$.
   c) Om två vektorer har längd 1, så har också deras kryssprodukt längd 1.
   d) Om två komplexa tal har belopp 1, så har också deras produkt belopp 1.
   e) Grafen till $f(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$ har en tagent som går genom 1 på y-axeln.
   f) Följande formel gäller när båda sidor är definierade:
   $$\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} = \tan^2(\frac{x}{2}).$$

7. a) Ange den exakta matematiska definitionen av att funktionen $f(x)$ har gränsvärdet 1 när $x \to 2$. (2p)

   b) Bevisa att $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$ när $\lim_{x\to a} f(x) = L$ och $\lim_{x\to a} g(x) = M$. (4p)