MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)

---

1. Till denna uppgift skulle endast lämnas svar, men här ges kortfattade lösningar.

   a) För vilka reella tal x gäller det att $x < x^2 + 1$?

   Lösning:

$$x < x^2 + 1 \iff x^2 - x + 1 > 0 \iff (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$$

   Vi ser att detta är sant för **alla reella x**.

   b) För vilket eller vilka värden på a är vektorn med koordinater $(1, a, 2)$ vinkelrät mot vektorn $(1, 2, 3) \times (1, a, 2)$?

   Lösning: Eftersom vektorprodukten alltid är vinkelrät mot de ingående faktorerna (av vilka den ena är just $(1, a, 2)$), så gäller detta för **varje reellt värde på a**.

   c) Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + ay = b \end{cases}$ får oändligt många lösningar?

   Lösning: Den utökade koefficientmatrisen undergår radoperationer:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 3-2a & 1-2b \end{bmatrix}$$

   För att få oändligt många lösningar, måste man ha färre pivotelement än antalet obekanta. Därigenom tvingas hela andra raden vara en nollrad, dvs $\mathbf{a} = \mathbf{\frac{2}{3}}$, $\mathbf{b} = \mathbf{\frac{1}{2}}$.

   d) Bestäm $f'(\frac{1}{2})$ då $f(x) = \cos(\arctan 2x)$.

   Lösning: Kedjeregeln i två led ger

$$f'(x) = -\sin(\arctan 2x) \cdot \frac{2}{1 + (2x)^2}$$

   och därmed är

$$f'(\frac{1}{2}) = -\sin(\arctan 1) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$

e) Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^3 = e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}$

Lösning: Högerledet förenklas:

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi i}{3} + i\sin\frac{2\pi i}{3} + \cos\frac{4\pi i}{3} + i\sin\frac{4\pi i}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1$$

Vi ska alltså lösa ekvationen $z^3 = -1$

$$\iff \quad z^3 + 1 = 0 \quad \iff \quad (z+1)(z^2 - z + 1) = 0$$

De två faktorernas nollställen är våra lösningar: $\mathbf{z = -1},\ \mathbf{z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

f) Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2}\right)$

Lösning: Konjugatförlängning ger

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{x^2\left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1} \to \mathbf{\frac{1}{2}} \text{ då } x \to 0$$

---

2. a) Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller linjerna $(x, y, z) = (2, 1, 1) + t(2, 2, 1)$ och $x = -(y + 1) = -z$.

Lösning: En parameterform för den andra linjen är $(x, y, z) = (0, -1, 0)+ t(1, -1, -1)$. En normalvektor till det sökta planet måste vara vinkelrät mot linjernas rikningsvektorer. Normalvektorn kan därför tas som vektorprodukten av dessa:

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -(-3) \\ -4 \end{bmatrix}$$

och vi tar som normalvektor $n = (1, -3, 4)$. Alltså är planets ekvation $x - 3y + 4z = D$ för någon konstant D och insättning av punkten $(0, -1, 0)$ som ligger t o m på båda linjerna ger att $D = 3$; alltså är sökta planets ekvation $x - 3y + 4z = 3$.

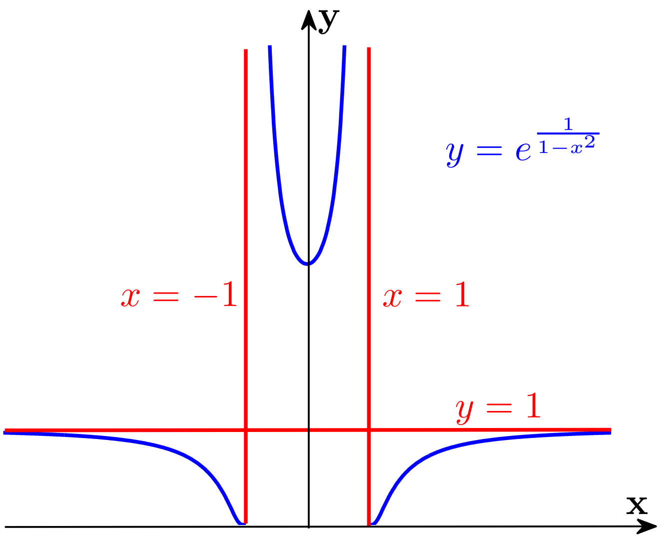
b) Bestäm konstanten a så att de två linjerna $(x, y, z) = (4 - t, 5 + t, 2t)$ och $(x, y, z) = (at, 1 + 2t, 2 - t)$ skär varandra och ange skärningspunkten.

Lösning: Här måste vi hålla isär parametrarna i linjernas ekvationer och lösa ekvationssystemet $\begin{cases} 4 - s &= at \\ 5 + s &= 1 + 2t \\ 2s &= 2 - t \end{cases}$

Systemet av de två sista ekvationerna har den entydiga lösningen $s = 0,\ t = 2$. För att en lösning till hela systemet ska existera, måste nu enligt första ekvationen $\mathbf{a} = \mathbf{2}$, och skärningspunkten blir $(\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{0})$.

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}$.
Ange alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
Du behöver inte utreda var kurvan är konvex/konkav.

Lösning: Funktionen f är tydligen definierad för alla reella x utom ± 1. Eftersom f är *jämn*, kan vi undersöka dess uppträdande för $x \geq 0$ och sedan utnyttja den jämna symmetrin.
Vi reder ut gränsvärdena då $x \to 1^{\pm}$ och då $x \to \infty$:
$f(x) \to \infty$ då $x \to 1^-$
$f(x) \to 0$ då $x \to 1^+$
$f(x) \to 1$ då $x \to \infty$
Nu återstår att avgöra funktionens växande/avtagande, vilket görs med derivatans hjälp:
$f'(x) = e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)} \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$ Derivatan är alltså noll i $x = 0$ och positiv för $0 < x < 1$ och $x > 1$. Detta innebär att f är växande i de två angivna intervallen, och då f är jämn, innebär det också att f är avtagande i $x < -1$ och $-1 < x < 0$, samt har ett **lokalt minimum i** $\mathbf{x = 0}$. **Asymptoter är linjerna** $\mathbf{x = \pm 1}$ **och** $\mathbf{y = 1}$.



4. Visa att funktionen $f(t) = \dfrac{\tan t}{2 + \tan^2 t}$ har ett största och ett minsta värde i intervallet $[0, \frac{\pi}{2})$, och beräkna dessa värden.

Lösning: Sätt $x = \tan t$, då växer x från 0 mot ∞ då t växer från 0 mot $\dfrac{\pi}{2}$. Vi kan då lättare analysera $f(t) = g(x) = \dfrac{x}{2 + x^2}$. (Det går förstås bra att behålla variabeln t, men derivatan blir mera komplicerad.) Vi deriverar: $g'(x) = \dfrac{2 - x^2}{(2 + x^2)^2}$, och ser att derivatan är positiv då $0 \leq x < \sqrt{2}$, lika med noll för $x = \sqrt{2}$ och negativ för $\sqrt{2} < x < \infty$. Det betyder att $g(x)$ växer från $g(0) = 0$ till ett maximum $g(2) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ och därefter avtar mot noll då $x \to \infty$. I termer av $f(t)$ innebär detta att $f(t)$ växer från $f(0) = 0$ till $f(\arctan 2) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ och sedan avtar mot noll då $t \to \dfrac{\pi}{2}$.

Minsta värdet är alltså 0, och största värdet är $\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$.

5. Låt $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & \text{om} \quad x < 0 \\ e^{-x^2} & \text{om} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Visa att f är inverterbar.

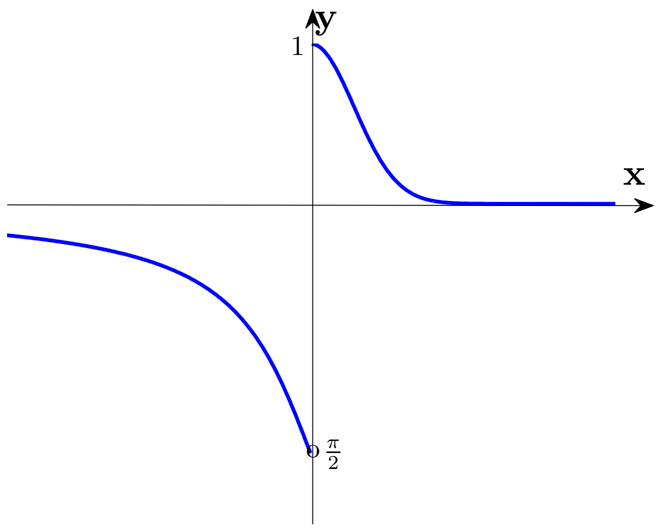
Lösning: Funktionen är definierad för alla reella x. Vi kontrollerar funktionens växande/avtagande med hjälp av derivatan:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(\frac{-1}{x^2}) = \frac{-1}{1+x^2} & \text{om} \quad x < 0 \\ -2xe^{-x^2} & \text{om} \quad x > 0 \end{cases}$$

Derivatan existerar och är negativ, utom i $x = 0$ där den inte existerar. $f(x)$ är därmed avtagande för $x < 0$ och avtagande för $x > 0$. Vi tittar på gränsvärdena i $\pm\infty$ och $0^{\pm}$:

$f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$
$f(x) \to -\dfrac{\pi}{2}$ då $x \to 0^-$
$f(x) \to 1$ då $x \to 0^+$
$f(x) \to 0$ då $x \to \infty$

En skiss av kurvan illustrerar situationen.



f avtar för negativa x mellan 0 och $-\dfrac{\pi}{2}$, och avtar för positiva x från 1 mot noll. Inget funktionsvärde antas mer än en gång. Då är funktionen injektiv och inverterbar från $\mathcal{V}_f$ till $\mathcal{D}_f$.

b) Bestäm inversens definitionsmängd och värdemängd.

Lösning: Av föregående studie ser vi att f:s värdemängd och därmed inversens definitionsmängd är $(-\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Tidigare har vi konstaterat att f är definierad för hela $\mathbf{R}$, vilket därmed är inversens värdemängd.

c) Ange funktionsuttrycket $f^{-1}(x)$.

Lösning: För att invertera $f(x)$ behöver vi lösa ut y ur

$$x = \begin{cases} \arctan \frac{1}{y} & \text{om} \quad y < 0 \quad (-\frac{\pi}{2} < x < 0) \\ e^{-y^2} & \text{om} \quad y \geq 0 \quad (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

Detta ger oss

$$\mathbf{f^{-1}(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\tan x} & \text{om} \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \sqrt{-\ln x} & \text{om} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. **Svaren ska motiveras**. Högst 2 poäng per fråga, bara svaret ”sant” eller ”falskt” ger ingen poäng.

   a) Om $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = 0$ så är $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \bullet (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2$.

   Lösning: Att skalärprodukten är noll medför att vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är rät. Vi får

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \bullet (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 = (|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin \frac{\pi}{2})^2 = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2$$

   så påståendet är **sant**.

   b) Varje ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta saknar lösning.

   Lösning: Detta är **falskt**, vilket följande exempel visar (det har entydig lösning $x = y = 1$):

$$\begin{cases} x & + & y & = & 2 \\ x & - & y & = & 0 \\ x & + & 2y & = & 3 \end{cases}$$

   c) Om f, g är deriverbara funktioner sådan att $f(x) < g(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så kan det aldrig vara så att $f'(x) > g'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

   Lösning: Också detta påstående är **falskt**, ta t ex $f(x) = -e^{-x}$ och $g(x) = 0$, med $f'(x) = e^{-x}$ och $g'(x) = 0$. Här är $f(x) < g(x)$ och $f'(x) > g'(x)$ för alla reella x.