MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157 och TMV156)
Tid: 2013-08-28, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Anders Martinsson, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2012 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1213/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
   Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) För vilka reella tal x gäller det att $x < x^2 + 1$? (2p)

   b) För vilket eller vilka värden på a är vektorn med koordinater $(1, a, 2)$ vinkelrät mot vektorn $(1, 2, 3) \times (1, a, 2)$? (2p)

   c) Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet (2p)
   $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + ay = b \end{cases}$ får oändligt många lösningar?

   d) Bestäm $f'(\frac{1}{2})$ då $f(x) = \cos(\arctan 2x)$. (2p)

   e) Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^3 = e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}$ (2p)

   f) Beräkna $\lim_{x \to 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2} \right)$ (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Bestäm ekvationen för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller linjerna $(x, y, z) = (2, 1, 1) + t(2, 2, 1)$ och $x = -(y + 1) = -z$. (6p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = e^{(\frac{1}{1-x^2})}$. (6p)
   Ange alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
   Du behöver inte utreda var kurvan är konvex/konkav.

Var god vänd!

---

4. Visa att funktionen $f(t) = \dfrac{\tan t}{2 + \tan^2 t}$ har ett största och ett minsta värde i intervallet $[0, \frac{\pi}{2})$, och beräkna dessa värden. (6p)

5. Låt $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & \text{om} \quad x < 0 \\ e^{-x^2} & \text{om} \quad x \geq 0 \end{cases}$ (6p)

   a) Visa att f är inverterbar.

   b) Bestäm inversens definitionsmängd och värdemängd.

   c) Ange funktionsuttrycket $f^{-1}(x)$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. **Svaren ska motiveras**. Högst 2 poäng per fråga, bara svaret ”sant” eller ”falskt” ger ingen poäng. (6p)

   a) Om $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = 0$ så är $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \bullet (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2$.

   b) Varje ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta saknar lösning.

   c) Om f, g är deriverbara funktioner sådan att $f(x) < g(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så kan det aldrig vara så att $f'(x) > g'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x. (2p)

   b) Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ med hjälp av definitionen. (4p)

VA