MATEMATIK
Chalmers

Lösningsförslag till Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157), 2013-10-26

---

1. Till denna uppgift skulle endast lämnas svar, men här ges kortfattade lösningar.

   a) För vilka tal x gäller $\dfrac{1}{x^2+1} > \cos^2(x) - 1$?

   Lösning: Vi har att för alla $x \in \mathbb{R}$ så är $\dfrac{1}{x^2+1} > 0$ och $\cos^2(x) - 1 \leq 0$ då ju $-1 \leq \cos x \leq 1$. Alltså har vi $\dfrac{1}{x^2+1} > 0 \geq \cos^2(x) - 1$ så att olikheten gäller för alla $x \in \mathbb{R}$.

   b) Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + ay = b \end{cases}$ får oändligt många lösningar?

   Lösning: Den utökade koefficientmatrisen övergår genom radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & a+4 & b-2 \end{bmatrix}$$

   För att få oändligt många lösningar, måste man ha färre pivotelement än antalet obekanta. För att få lösbarhet kan vi inte ha något pivotelement i högerledskolonnen. Därigenom tvingas hela andra raden vara en nollrad, dvs $\mathbf{a = -4}$, $\mathbf{b = 2}$.

   c) I vilka punkter x är funktionen $f(x) = |x^2 + 3x + 2|$ deriverbar?
   Lösning: f är konstruerad som en skarvning av tre polynombitar, för $x < -2$ har vi polynomet $x^2 + 3x + 2$, för $-2 \leq x < -1$ polynomet $-(x^2 + 3x + 2)$ och för $x \geq -1$ polynomet $x^2 + 3x + 2$. I inre punkter i respektive intervall är därmed f lika deriverbar som respektive polynom, men i skarvarna får vi olika värden på vänster- och högerderivata. Funktionen är deriverbar för **alla reella x utom $\mathbf{x = -2}$ och $\mathbf{x = -1}$**.

   d) Beräkna gränsvärdena: *i)* $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x-x^2}$, *ii)* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

   Lösning: (i) Då $t = x - x^2 \to -\infty$ då $x \to \infty$, och då $e^t \to 0$ då $t \to -\infty$, så är gränsvärdet $\mathbf{0}$.

   (ii) Genom att faktoruppdela nämnaren och göra uttrycket liknämnigt, ser vi lätt vad gränsvärdet blir:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{1}{x-2} \to \mathbf{-1} \text{ då } x \to 1$$

e) Ange i vilket/vilka intervall som kurvan $y = \arctan(x^2)$ är *konvex* (Adams: *concave up*).

Lösning: Vi deriverar två ggr och får $y'' = \dfrac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$. Kurvan är konvex då $y'' > 0$, vilket motsvarar att x tillhör intervallet $(-1/3^{1/4}, 1/3^{1/4})$.

f) Låt $f(x) = \cos x,\ \pi \le x \le 2\pi$. Uttryck inversen till f med hjälp av arccos.

Lösning: Att invertera innebär att vi löser ut x som funktion av y ur vårt funktionsuttryck:

$$y = \cos x,\ \pi \le x \le 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm \arccos y + n \cdot 2\pi$$

Det enda val som ger $\pi \le x \le 2\pi$ är minustecken kombinerat med $n = 1$. Alltså har vi $f^{-1}(y) = -\arccos y + 2\pi$, eller med omkastade variabelnamn:
$\mathbf{f^{-1}(x) = 2\pi - \arccos x}$.

2. a) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(1,-1,0)$, $(-1,3,2)$ och $(2,5,1)$.

Lösning: En normal till planet ges (t.ex) av $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ där $\boldsymbol{u} = \vec{AB}$ och $\boldsymbol{v} = \vec{AC}$ om vi sätter $A = (1,-1,0)$, $B = (-1,3,2)$ och $C = (2,5,1)$. Detta ger

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Vi väljer normalen $\boldsymbol{n}$ som är $-1/4$ gånger denna vektor och får att planet har ekvationen $2x - y + 4z = d$. Eftersom det går genom A har vi $2 + 1 = d$.
Svar: $\mathbf{2x - y + 4z = 3}$.

---

b) Bestäm konstanten a så att linjen

$$\begin{cases} x &= (a+1)t+1 \\ y &= 2t \\ z &= (1-a)t+1 \end{cases}$$

blir parallell med planet i a).

Lösning: Linjen har riktningsvektorn $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2 \\ 1-a \end{pmatrix}$. För att linjen ska vara parallell med planet krävs att $\boldsymbol{w}$ och $\boldsymbol{n}$ är vinkelräta, vilket ger ekvationen $0 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 2(a+1) - 2 + 4(1-a)$, dvs $0 = -2a + 4$ eller $\mathbf{a} = \mathbf{2}$.

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-2}$. Ange också alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet).

Lösning: Funktionen f är definierad för alla reella tal x sådana att $x^2 - 2 \neq 0$. Det ger definitionsmängden $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

När $x \to -\sqrt{2}^-$, eller $x \to \sqrt{2}^+$ gäller att $1/(x^2 - x2) \to \infty$. Detta ger att $f(x) \to \infty$ i dessa fall.

När $x \to -\sqrt{2}^+$ eller $x \to \sqrt{2}^-$ gäller att $1/(x^2 - 2) \to -\infty$, så $f(x) \to -\infty$ under dessa omständigheter.

När $x \to -\infty$, gäller att $f(x) \to 0$, och när $x \to \infty$, gäller att $f(x)/x \to \infty$. Alltså är $y = 0$ en asymptot i $-\infty$ men inte i ∞.

Det ger att vi har två lodräta asymptoter $x = \pm\sqrt{2}$ och en vågrät $y = 0$ i $-\infty$.

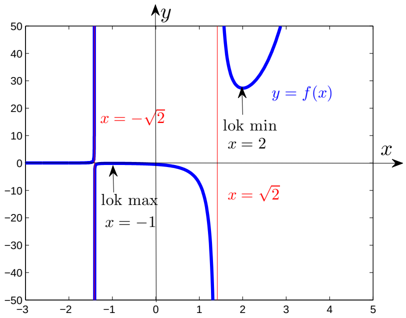
Derivering ger enligt kvotregeln

$$f'(x) \quad = \quad \frac{2e^x(x^2 - x - 2)}{(x^2-2)^2} = \frac{2e^x(x+1)(x-2)}{(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2}$$

Detta ger att f':s tecken bestäms av $(x+1)(x-2)$. Alltså är f strängt avtagande på intervallen $[-1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2$ och strängt växande på $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1] \cup [2, \infty)$.

Alltså har $f(x)$ ett lokalt maximum i -1 och ett lokalt minimum i 2. Vi har $f(-1) = -e^{-2}$, som är negativt och $f(2) = \frac{e^4}{2}$, som är positivt.

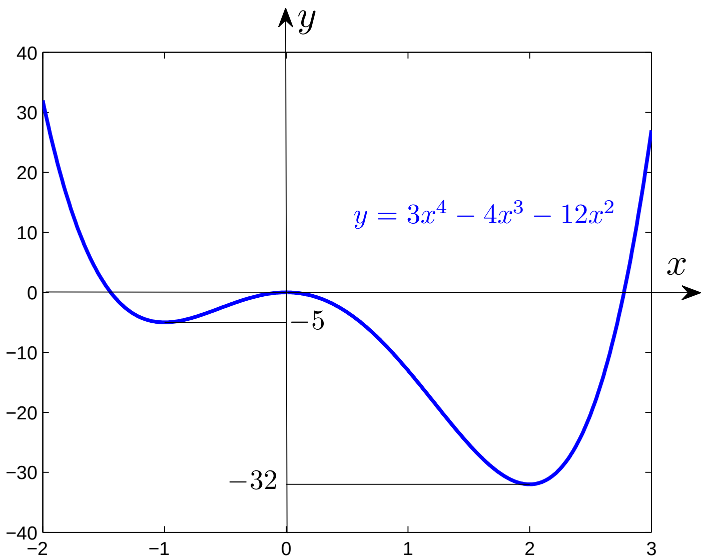
Vi sammanfattar i en figur:



Svar: Funktionen har definitionsmängden $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$. Den har asymptoterna $x = \pm\sqrt{2}$ samt $y = 0$ i $-\infty$. Den har ett lokalt maximum i $x = -1$ och ett lokalt minimum i 2. Värdemängden är $(-\infty, -e^{-2}] \cup (0, \infty)$.

4. Bestäm för varje värde på konstanten s, antalet lösningar till ekvationen $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = s$. (6p)

Lösning: Vi ritar grafen till vänsterledet $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$. Antalet lösningar till ekvationen $f(x) = s$ är då antalet skärningspunkter mellan grafen $y = f(x)$ och linjen $y = s$. Derivatan är $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x + 1)(x - 2)$, med nollställena -1, 0, 2. Dess teckenväxling har utseendet $-0 + 0 - 0+$, dvs f avtar i $(-\infty, -1)$ och $(0, 2)$, växer i $((-1, 0)$ och $(2, \infty)$, vilket gör att vi kan skissa grafen:



Nu lägger vi in ”ribban” $y = s$ för olika s och räknar skärningspunkter. Slutsats:

$-\infty < s < -32$:	inga lösningar,
$s = -32$:	en lösning,
$-32 < s < -5$:	2 lösningar,
$s = -5$:	3 lösningar,
$-5 < s < 0$:	4 lösningar,
$s = 0$:	3 lösningar,
$0 < s < \infty$:	2 lösningar.

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

   b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$.

   Lösning: a) Antag att f är definierad för $I \setminus \{a\}$ där I är ett intervall runt a. Då gäller att

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\; \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon.$$

   b) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och tag $\delta = \min[1/2, \varepsilon/16]$. Vi vill uppskatta $|x^3 - 8| = |(x^2 + 2x + 4)(x - 2)| = |x^2 + 2x + 4||x - 2|$. Om nu $|x - 2| < \delta$ så gäller alltså $|x - 2| < \delta \leq 1/2$ som ger att $3/2 < x < 5/2 \Rightarrow 5/4 < x^2+2x+4 < \frac{25}{4}+5+4 = \frac{61}{4} < \frac{64}{4} = 16 \Rightarrow |x^2+2x+4| < 16$. Alltså gäller för givet $\varepsilon > 0$ att vi kan ta $\delta = \min[1/2, \varepsilon/16]$ och då gäller med detta val av δ att om $|x-2| < \delta$ så har vi att $|x^3-8| = |(x-2)(x^2+2x+4)| = |x-2||x^2+2x+4| < 16|x-2| < 16\delta \leq 16(\varepsilon/16) = \varepsilon$; d v s definitionen av att $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$ är uppfylld.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska.

   a) Funktionen $f(x) = \ln|\ln|x||$ är definierad för alla $x \neq 0$.

   Lösning: Påståendet är **falskt**, eftersom $\ln|1| = 0$, och logaritmen (yttre funktionen här) ej är definierad för 0. $f(x)$ är ej definierat för $x = 1$.

   b) Om a och b är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så gäller att $|a \cdot b|^2 + |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2$.

   Lösning: Detta är **sant**, eftersom om vinkeln mellan vektorerna är α, så är

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2 = (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha)^2 + (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\alpha)^2 =$$

$$= |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \cdot 1$$

c) Det existerar ett tal $r > 0$ sådant att $|x| < r \Rightarrow |\sin x - x| < 10{-}13|x|$

Lösning: Olikheten kan, efter division med $|x|$, skrivas:

$$|\frac{\sin x}{x} - 1| < 10^{-13}$$

Det faktum att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ innebär just att till varje $\epsilon > 0$ (t ex $\epsilon = 10^{-13}$) finns ett $r > 0$ så att $|x| < r \Rightarrow |\frac{\sin x}{x} - 1| < \epsilon$, dvs $|x| < \delta \Rightarrow |\sin x - x| < \epsilon|x|$. Påståendet är **sant**.

7. a) Bevisa att om en deriverbar funktion har ett lokalt maximum i punkten $x = a$ så är $f'(a) = 0$.

b) Formulera medelvärdessatsen (med alla förutsättningar).

c) Ett tal a kallas en *fixpunkt* till funktionen $f(x)$ om $f(a) = a$. Visa att om det för den deriverbara funktionen $f(x)$ gäller att $f'(x) \neq 1$ för alla x, så kan $f(x)$ ha *högst en* fixpunkt.

Lösning: För (a) och (b), se läroboken! Här är en lösning till (c).

Antag att f uppfyller de givna förutsättningarna (deriverbar, $f'(x) \not= 1$ för alla x), men har mer än en fixpunkt. Antag då att x_1 och x_2 är två fixpunkter, $x_1 < x_2$. Vi kan då använda medelvärdessatsen på intervallet $[x_1, x_2]$. Det ger att det finns en punkt $c \in (x_1, x_2)$ så att

$$f(x_2) - f(x_2) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Eftersom $f(x_1) = x_1,\ f(x_2) = x_2$, så får vi $f'(c) = 1$. Detta motsäger vårt antagande om att derivatan aldrig är 1, och visar att det inte kan finnas mer än en fixpunkt.

VA