MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2013-10-26, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Jakob Hultgren, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2013 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter skrivningstidens slut.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1314/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) För vilka tal x gäller $\dfrac{1}{x^2+1} > \cos^2(x) - 1$? (2p)

   b) Bestäm konstanterna a och b så att ekvationssystemet (2p)

   $$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + ay = b \end{cases}$$

   får oändligt många lösningar.

   c) I vilka punkter x är funktionen $f(x) = |x^2 + 3x + 2|$ deriverbar? (2p)

   d) Beräkna gränsvärdena: (2p)

   i) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x-x^2}$, *ii)* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

   e) Ange det eller de öppna intervall där funktionen $f(x) = \arctan(x^2)$ är *konvex* (Adams: *concave up*). (2p)

   f) Låt $f(x) = \cos x$, $\pi \le x \le 2\pi$. Uttryck inversen till f med hjälp av arccos. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(1, -1, 0)$, $(-1, 3, 2)$ och $(2, 5, 1)$. (3p)

   b) Bestäm konstanten a så att linjen (3p)

   $$\begin{cases} x = (a+1)t + 1 \\ y = 2t \\ z = (1-a)t + 1 \end{cases}$$

   blir parallell med planet i a).

Var god vänd!

---

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-2}$. Ange också alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet). (6p)

4. Bestäm för varje värde på konstanten s, antalet lösningar till ekvationen $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = s$. (6p)

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   a) Funktionen $f(x) = \ln|\ln|x||$ är definierad för alla $x \neq 0$.

   b) Om a och b är vektorer i $\mathbb{R}^3$ så gäller att $|a \cdot b|^2 + |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2$.

   c) Det existerar ett tal $r > 0$ sådant att $|x| < r \Rightarrow |\sin x - x| < 10^{-13}|x|$.

7. a) Bevisa att om en deriverbar funktion har ett lokalt maximum i punkten $x = a$ så är $f'(a) = 0$. (3p)

   b) Formulera medelvärdessatsen (med alla förutsättningar). (2p)

   c) Ett tal a kallas en fixpunkt till funktionen $f(x)$ om $f(a) = a$. Visa att om det för den deriverbara funktionen $f(x)$ gäller att $f'(x) \neq 1$ för alla x, så kan $f(x)$ ha högst en fixpunkt. (2p)

VA