Lösningar till Inledande matemtik för E1, (TMV157) 14-01-18

1. (a) Räkneregler för potenser ger

$$\frac{(u^{1/2})^{1/5}(u^{-1/5})^2}{(u^{1/4})^2(u^{2/5})^{1/4}} \quad = \quad u^{1/10-2/5}u^{-2/4-2/20} = u^{-3/10-6/10} = u^{-9/10}.$$

Svar: $u^{-9/10}$.

(b) Den utökade koefficientmatrisen övergår genom radoperationer till trappstegsform:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & a & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & a+4 & b-2 \end{bmatrix}$$

För att få icke-lösbarhet ska vi ha något pivotelement i högerledskolonnen; dvs $a = -4,\ b \neq 2$.

Svar: $a = -4,\ b \neq 2$.

(c) Derivering enligt kvot- och produktreglerna ger

$$g'(x) \quad = \quad \frac{(f(x) + xf'(x))(1+\sqrt{x}) - xf(x)/(2\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}.$$

Detta ger

$$g'(1) \quad = \quad \{f(1) = 4, f'(1) = 1\} = \frac{(4+1)\cdot 2 - 4/2}{4} = \frac{10-2}{4} = 2.$$

Svar: 2.

(d) Det gäller att $f^{-1}(y) = x$, om $y = f(x)$, så vi löser ut x ur denna ekvation: $y = (2-3x)/(x+4)$. Efter multiplikation med $x+4$ blir det $y(x+4) = 2-3x$, eller $x(y+3) = 2-4y$. Alltså är $f^{-1}(y) = x = (2-4y)/(y+3)$ och $f^{-1}(x) = (2-4x)/(x+3)$.

Svar: $f^{-1}(x) = (2-4x)/(x+3)$.

(e) Linjen har riktningsvektor $v = (1,-2,1)$. Vektorn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,5,0) - (s,1,2)$. Vektorn $\overrightarrow{AB}$ parallell med linjen betyder att $\overrightarrow{AB}$ parallell med v vilket betyder att det finns ett tal $\alpha \in \mathbb{R}$ sådant att $\alpha(2-s,4,-2) = (1,-2,1)$. Detta gäller om $\alpha = -\frac{1}{2}$ och $s = 4$; dvs för $s = 4$ finns det ett α enligt ovan.

Svar: $s = 4$.

(f) Tyvärr smög det sig in ett fel i uppgiften; de i tesen angivna normalvektorerna var inte de avsedda. Uppgiften kan dock lösas för de angivna normalvektorerna; så vi gör det.

Vi använder oss av 'pencil of planes'. För varje $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller för punkter $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ som tillhör de båda planen i uppgiften, att $\alpha(x-y+z-1)+x+y-z-2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)x + (1-\alpha)y + (\alpha-1)z = \alpha+2$ och detta senare är ju ekvationen för ett plan med normalvektor $(\alpha+1, 1-\alpha, \alpha-1)$. Vi ser ju att valet $\alpha = 0$ ger oss ett plan med normalvektor $(\alpha+1, 1-\alpha, \alpha-1) = (1,1,-1)$ som alltså ger att svar på $ii)$ ges av planet $x+y-z = 2$. Vi ser dock att normalen i $i)$ kan vi inte erhålla för något val av α. Studerar vi stället $x-y+z-1+\beta(x+y-z-2) = 0$ så ser vi att valet $\beta = 0$ ger oss normalen i $i)$ med tillhörande plan $x-y+z = 1$.

Avsikten var naturligtvis att i ena deluppgiften ta en normal som inte var någon av de två givna planens normal.

Svar: i) $x-y+z = 1$, ii) $x+y-z = 2$.

2. a): Plan parallella med $x - y + 2z = 1$ har ekvation $x - y + 2z = D$ för något $D \in \mathbb{R}$; $D = -1$ är planet som innehåller punkten $(1, 0, -1)$.

   Svar: $x - y + 2z = -1$.

   b): Avståndet mellan en punkt (x_0, y_0, z_0) och planet $Ax + By + Cz = D$ ges av $d = |\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}|$ så att $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ och planet $x - y + 2z = 1$ ger $\frac{1}{\sqrt{2}} = d = |\frac{-D}{\sqrt{6}}|$. Det finns ju två plan parallella med det givna och de motsvarar alltså $D = \pm\sqrt{3}$; dvs

   Svar: $x - y + 2z = \pm\sqrt{3}$.

   c): Planet har normalvektor $n = (1, -1, 2)$ och linjen med den som riktningsvektor och innehållande origo, skär planet i den sökta punkten. Linjens ekvation på parameterform är $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, -1, 2)$ och insättning i planets ekvation ger: $t - (-t) + 4t = 1 \Leftrightarrow t = 1/6$ så att sökt punkt är $\frac{1}{6}(1, -1, 2)$.

   Svar: $\frac{1}{6}(1, -1, 2)$.

3. Funktionen är bara definierad på ett begränsat intervall så inga sneda asymptoter; lodräta asymptoter i ändpunkterna på intervallet. Vi ser att $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ och $\lim_{x\to\pi^-} f(x) = -\infty$. Dessutom ser vi att funtionen är definierad på hela det öppna intervallet $(0, \pi)$ utom i mittpunkten $\pi/2$ och där har vi $\lim_{x\to(\pi/2)^\pm} f(x) = 0$. Derivation ger $f'(x) = \dfrac{\frac{4}{\sqrt{3}}e^{4x/\sqrt{3}}\tan x - e^{4x/\sqrt{3}}(1 + \tan^2 x)}{\tan^2 x} = -\dfrac{e^{4x/\sqrt{3}}}{\tan^2(x)}(\tan x - \dfrac{1}{\sqrt{3}})(\tan x - \sqrt{3})$ vilket ger att avtagande på intervallet $(0, \pi/6)$, växande på intervallet $(\pi/6, \pi/3)$, avtagande på intervallen $(\pi/3, \pi/2)$ och $(\pi/2, \infty)$. Funktionen har alltså lokalt minimum i $x = \frac{\pi}{6}$ och lokalt maximum i $x = \frac{\pi}{3}$. Vi ser också att värdemängden är alla reella tal utom 0.

4. a) Minsta avståndet mellan planet och bollen är avståndet mellan planet och origo minus radien för bollen $= |\dfrac{1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot 0 - 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}| - \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

   b) Avståndet mellan en punkt på kurvan och planet π

   $= |\dfrac{1\cdot(-\frac{s}{6}) + (-1)\cdot(\frac{s-2s^2}{6}) + (-1)\cdot(\frac{s-\frac{4s^3}{3}}{6}) - 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}| = \dfrac{1}{6\sqrt{3}}|s + s - 2s^2 + s - \dfrac{4s^3}{3} + 6| = \dfrac{1}{6\sqrt{3}}|3s + 2(1 - s^2) + 4(1 - \dfrac{s^3}{3})| =$ (om $0 \le s \le 1$) $= \dfrac{1}{6\sqrt{3}}(3s - 2s^2 - \dfrac{4s^3}{3} + 6) = -\dfrac{1}{6\sqrt{3}}(\dfrac{4}{3}s^3 + 2s^2 - 3s - 6)$ vilket ger $d'(s) = -\dfrac{1}{6\sqrt{3}}(4s^2 + 4s - 3) = -\dfrac{1}{6\sqrt{3}}(s - \dfrac{1}{2})(4s + 6)$. Teckenstudie ger att $d(s)$ är växande på intervallet $(0, 1/2)$ och avtagande på intervallet $(1/2, 1)$ så att funktionen d har i intervallet ett maximum $d(1/2) = \frac{41}{36\sqrt{3}}$. Då $d(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ och $d(1) = \frac{17}{18\sqrt{3}}$ så är alltså funktionens minimum $\frac{17}{18\sqrt{3}}$ på intervallet.

   Svar: Kurvans minsta avstånd till planet π är $\frac{17}{18\sqrt{3}}$ och största avstånd är $\frac{41}{36\sqrt{3}}$.

5. a) Antag att f är definierad för $I \setminus \{a\}$ där I är ett intervall runt a. Då gäller att

   $$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

   b) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. För något ξ mellan x och 1 gäller enligt medelvärdessatsen att $|\arctan x - \dfrac{\pi}{4}| = |\dfrac{1}{\xi^2 + 1}(x - 1)| = \dfrac{1}{\xi^2 + 1}|x - 1| \le |x - 1|$. Alltså har vi att om

$|x-1|<\delta$ så gäller $|\arctan x - \dfrac{\pi}{4}| \le |x-1| < \delta = \varepsilon$ om vi alltså väljer $\varepsilon = \delta$; d v s definitionen av att $\lim_{x\to 1} \arctan x = \frac{\pi}{4}$ är uppfylld.

6. a) Vi har $f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$ och $f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$ som är positiv för alla x. Därför är $f(x)$ konvex på intevallet som är hela tallinjen.

   Svar: Sant.

   b) Då $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$, $p > 0$ och $\tan x = p$, $\tan y = 1/p$ har vi att $\sin x = p\cos x$, $p \sin y = \cos y$ och $0 < x + y < \pi$. Additionsformeln för cos ger $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos x p \sin y - p \cos x \sin y = 0$ så att $x + y = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Alltså gäller $n = 0$ då ju enligt ovan $0 < x + y < \pi$.

   Svar: Sant.

   c) i) För x tillräckligt nära 3 gäller $5-2x<0,\ x-2>0,\ x-5<0$ och $3x-7>0$. Alltså har vi $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{|5-2x|-|x-2|}{|x-5|-|3x-7|} = \lim_{x\to 3} \frac{-(5-2x)-(x-2)}{-(x-5)-(3x-7)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{-4x+12} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-3} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to 3} 1 = -\frac{1}{4}$

   Svar: Falskt.

   ii) Kuberingsformeln $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ och förlängning med lämpliga faktorer ger $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(3+x)^{1/2}-2}{(7+x)^{1/3}-2} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{((3+x)^{1/2}-2)((3+x)^{1/2}+2)(((7+x)^{1/3})^2+(7+x)^{1/3}2+2^2)}{((3+x)^{1/2}+2)((7+x)^{1/3}-2)(((7+x)^{1/3})^2+(7+x)^{1/3}2+2^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{((3+x)-4)(((7+x)^{1/3})^2+2(7+x)^{1/3}+4)}{((3+x)^{1/2}+2)(7+x-2^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(((7+x)^{1/3})^2+2(7+x)^{1/3}+4)}{((3+x)^{1/2}+2)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(((7+x)^{1/3})^2+2(7+x)^{1/3}+4)}{((3+x)^{1/2}+2)} = \frac{4+4+4}{2+2} = \frac{12}{4} = 3.$$

   Vi noterar vidare att gränsvärdet i uppgiften är av formen '$\frac{0}{0}$' och ett användande av ℓ'Hospital ger en enklare beräkning: $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(3+x)^{1/2}-2}{(7+x)^{1/3}-2} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{(3+x)^{1/2}}}{\frac{1}{3}(7+x)^{-2/3}} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{2}\frac{1}{(3+x)^{1/2}}3(7+x)^{2/3} = \frac{3}{2}\frac{1}{2}2^2 = 3.$

   Svar: Sant.

7. För ett bevis se kurslitteraturen; Adams sid. 141.