MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2014-01-18, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Anna Persson, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2013 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter skrivningstidens slut.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1314/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
   Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) Förenkla (2p)

   $$\frac{(u^{1/2})^{1/5}(u^{-1/5})^2}{(u^{1/4})^2(u^{2/5})^{1/4}}$$

   så långt möjligt.

   b) För vilka konstanter a och b har ekvationssystemet (2p)

   $$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + ay = b \end{cases}$$

   inga lösningar?

   c) Man vet att $f(1) = 4$ och att $f'(1) = 1$. Bestäm $g'(1)$ om (2p)

   $$g(x) = \frac{xf(x)}{1+\sqrt{x}}.$$

   d) Funktionen (2p)

   $$f(x) = \frac{2-3x}{x+4}$$

   är inverterbar. Bestäm en formel för $f^{-1}(x)$.

   e) Låt $A = (s, 1, 2)$, $B = (2, 5, 0)$. Bestäm om möjligt s så att vektorn $\overrightarrow{AB}$ är parallell med linjen $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$. (3p)

   f) Bestäm om möjligt ekvationen för de plan som innehåller linjen (3p)
   $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ och har normalvektorer *i)* $(1, -1, 1)$, *ii)* $(1, 1, -1)$.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Bestäm ekvationen för det plan som är parallellt med planet $x-y+2z = 1$ och innehåller punkten $(1, 0, -1)$. (2p)

---

b) Bestäm ekvationen för det plan som är parallellt med $x - y + 2z = 1$ och har ett avstånd till origo som är $1/\sqrt{2}$. (2p)

c) Bestäm den punkt i planet $x - y + 2z = 1$ som är närmast origo. (2p)

3. Låt f vara funktionen $f(x) = \dfrac{e^{4x/\sqrt{3}}}{\tan x}$ på intervallet $(0, \pi)$. Skissa funktionens graf och ange också alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet). Bestäm också funktionens värdemänd, V_f. (6p)

4. Låt planet π i $\mathbb{R}^3$ vara $x - y - z = 1$.

   a) Finn minsta avståndet mellan planet π och bollen med radie $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ centrerad i origo. *Ledning*: Detta är enkelt om man vet avståndsformeln mellan en punkt och ett plan. (2p)

   b) Funktionen $C(x, y, z) = \dfrac{1}{6}(-s, s - 2s^2, s - \dfrac{4s^3}{3}),\ 0 \leq s \leq 1$ är en kurva i $\mathbb{R}^3$. Finn kurvans största och minsta avstånd till planet π. (4p)

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim_{x \to 1} \arctan x = \dfrac{\pi}{4}$. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   a) Funktionen $f(x) = x \arctan(x)$ är konvex på intervallet $(-\infty, \infty)$.

   b) Låt $p > 0$. Antag att $x, y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ är sådana att $\tan x = p$ och $\tan y = 1/p$. Då gäller $x + y = \frac{\pi}{2}$.

   c) *i)* $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{|5 - 2x| - |x - 2|}{|x - 5| - |3x - 7|} = \frac{1}{4}$, *ii)* $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{(3 + x)^{1/2} - 2}{(7 + x)^{1/3} - 2} = 3$.

7. Antag att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på intevallet $[a, b]$ och deriverbar på (a, b). Visa att om $f'(x) = 0$, för alla x i (a, b), så är $f(x)$ konstant på $[a, b]$. (6p)