Lösningar till Inledande matemtik för E1, (TMV157), 2014-10-30

1. (a) i) Absolutbeloppet av ett reellt tal är alltid icke-negativt så alltså alltid strikt större än -1; dvs olikheten gäller för alla $x \in \mathbb{R}$, ii) $|x| \geq 0$ ger att det inte finns något reellt tal x som uppfyller olikheten, iii) olikheten är ekvivalent med $|x-(-1)| < 1$ som är uppfyllt för alla reella tal x som har ett avstånd till -1 som är strikt mindre är 1; svaret är alltså $-2 < x < 0$.

   (b) Matrisformuleringen av ekvationssystemet är med den utökade matrisen $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \\ \hookleftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4+a & b-2 \end{array}\right)$, varav vi ser att ekvationssystemet saknar lösning om $4+a=0$ och $b-2 \neq 0$; dvs om $a=-4$ och $b \neq 2$.

   (c) i) Den kontinuerliga funktionen $f(x)=x$ har inget största värde på det halv-öppna intervallet $[0,1)$. ii) Nej, det finns ingen surjektiv sådan funktion f (dvs värdemängen för funktionen är hela bildmängden B, ekvivalent med $V_f = B$) ty om så fanns skulle en sådan funktion behöva avbilda åtminstone ett element i definitionsmängden på två olika element i värdemängden; och alltså inte vara en funktiom.

   (d) Deriveringen av den via relationen $y\cos x = 1 + sin(xy)$ implicit givna funktionen $y=y(x)$ ger $-y\sin x + y'\cos x = \cos(xy)(y+xy')$; vilket ger i punkten $(0,1)$ att $y'(0)=1$. Riktningskoefficienten k för tangenten till kurvan i punkten $(0,1)$ tecknas på två vis: $1 =$ (enligt ovan) $= y'(0) = k = \frac{y-1}{x-0}$ där (x,y) är en godtycklig punkt på tangenten; detta ger tangentens ekvation $y = x+1$.

   (e) i) Kontinuitet för potensfunktionen ger att vi kan flytta gränsvärdet in i argumentet för potensfunktionen så att $\lim_{x\to 1}(\frac{x-1}{x^2+\tan(x-1)-x})^{11} = (\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+\tan(x-1)-x})^{11}$ och då gränsvärdet nu är på formen '$\frac{0}{0}$' så ger ℓ'Hospital att $\lim_{x\to 1}(\frac{x-1}{x^2+\tan(x-1)-x})^{11} = (\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x+1+\tan^2(x-1)-1})^{11} = (\frac{1}{2})^{11} = 2^{-11}$

   ii) Funktionen är på formen $funktion^{funktion}$ och vi gör omskrivningen $f(x) = (\ln x)^{\ln x} = e^{\ln((\ln x)^{\ln x})} = e^{\ln x \ln(\ln x)}$ som har definitionsmängden $\{x > 1\}$. Derivatan blir då för x i definitionsmängden enligt kedjeregeln $f'(x) = e^{\ln x\ln(\ln x)}(\frac{d}{dx}(\ln x \ln(\ln x)) = (\ln x)^{\ln x}(\frac{1}{x}\ln(\ln x) + \ln x \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}) = (\ln x)^{\ln x}\frac{1}{x}(\ln(\ln x)+1)$.

   (f) Vi har $f'(x) = 27x^8 + 3x^2 - 12x + 12 = 27x^8 + 3(x^2-4x+4) = 27x^8 + 3(x-2)^2 > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Alltså är f strängt växande på $\mathbb{R}$ vilket betyder att f är omvänbar, har en invers. Derivering av $(f^{-1})(f(x)) = x$ ger $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ och då $f(0) = -8$, $f'(0) = 12$ får vi $(f^{-1})'(-8) = \frac{1}{12}$.

2. (a) Plan parallella med π har ekvation $x-y+z=D$ för något reellt tal D. Insättning av punkten $P_0 = (1,1,2)$ ger att $D=2$ så att det efterfrågade planet har ekvation $x-y+z=2$.

   (b) Planet π:s normal är $n = (1,-1,1)$ och låt P vara en punkt i planet, t ex $P = (1,0,0)$, så att $\overrightarrow{PP_0} = (1,1,2)-(1,0,0) = (0,1,2)$ och därmed $\overrightarrow{PP_0} \cdot n = 1$ som ger att efterfrågade avståndet $d = |\text{Proj}_n(\overrightarrow{PP_0})| = |\frac{\overrightarrow{PP_0}\cdot n}{|n|}\frac{n}{|n|}| = |\frac{\overrightarrow{PP_0}\cdot n}{|n|}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

   (c) Till P_0 närmaste punkten i planet π fås som skärningen mellan planet och linjen ℓ genom P_0 med riktningsvektor normalen till π. Den punktens ortsvektor är $\overrightarrow{0P_0} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{n}{|n|}$ där plus- eller minustecknet gäller beroende på om P_0 ligger på 'ena eller andra sidan av π'. Det enklaste, utan mer teori, är kanske att pröva om erhållen punkt med plus- eller minusval, ligger i planet. Vi ser att minustecken ger punkten $P_1 \equiv \frac{1}{3}(2,4,5)$ som ligger i planet π och alltså är den sökta, till P_0, närmsta punkten i planet π.

   (d) Väljer vi istället plustecken ovan i c) så går vi istället längs linjen ℓ från P_0 och bort från planet π och punkten $P_2 \equiv \overrightarrow{0P_0} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{n}{|n|} = \frac{1}{3}(4,2,7)$ ligger då i ett plan parallellt med π och på ett avstånd d från P_0. Detta plan har ekvation $x-y+z=D$ och insättning av P_2 ger $D=3$; dvs sökt plans ekvation är $x-y+z=3$.

   OBS1: I delfråga d) har på tentamenstesen tyvärr fallit bort det avsedda kravet att sökt plan ska vara parallellt med planet π. Den ofullständiga formuleringen i deluppgift d) ger ju att svaret är alla plan som tangerar sfären runt punkten P_0 med radie d; deras ekvation kommer ju bli involverade att skriva ner explicit (vilket väl avsågs i uppgiften).

   OBS2: En enklare strategi för att finna svaret på b) och c) är ju att först besvara c) genom att finna punkten P_1. Detta görs enkelt genom att teckna linjen ℓ:s ekvation på parameterform $(x,y,z) = P_0 + t\ \overrightarrow{n} = (1,1,2) + t(1,-1,1) = (1+t, 1-t, 2+t)$ och finna skärningspunkten P_1 med planet genom insättning av koordinaterna för linjen ℓ i planet π:s ekvation som då ger $t = -\frac{1}{3}$ och skärningspunkten $P_1 = (1+t, 1-t, 2+t) = (1-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}, 2-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}(2,4,5)$ och då blir ju avståndet $d = |\ \overrightarrow{P_0P_1}\ | = \sqrt{(\frac{2}{3}-1)^2 + (\frac{4}{3}-1)^2 + (\frac{5}{3}-2)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Funktionen $f(x) = \arctan x - \frac{x}{x+1}$ har definitionsmängd $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Lodrät asymptot är $x=-1$ och $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$. Sneda, vågräta, asymptoter ges av $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2} - 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2} - 1$. Vidare är $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}$ och teckenstudie

x	$-\infty$		-1		0		∞
f'		$-$	ej def.	$-$	0	$+$	
f	$-\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$

ger en graf (se nedan) varur vi ser att $V_f = (-\infty, -\frac{\pi}{2}-1) \cup [0,\infty)$.

4. Funktionen $\frac{x(x-3)}{x-4}$ har definitionsmängd $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ och lodrät asymptot i $x=4$ med $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$. Vi ser genom att beräkna $k_\pm \equiv \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \ldots = 1$ och $m_\pm \equiv \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - k_\pm x = \ldots = 1$ att $y = x+1$ är sned asymptot till $f(x)$ både i $\pm\infty$. Detta ses kanske enklare genom att utföra divisionen $\frac{x(x-3)}{x-4} = \ldots = x+1+\frac{4}{x-4}$. Vidare ser vi att $f'(x) = \frac{(2x-3)(x-4)-x(x-3)}{(x-4)^2} = \ldots = \frac{(x-2)(x-6)}{(x-4)^2}$ som ger teckenstudietabellen

x		2		4		6	
f'	$+$	0	$-$	ej def.	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	1	$\searrow$	ej def.	$\searrow$	9	$\nearrow$

. Då $\max_{[0,4)} f = 1 < \frac{5}{4} = \min_{(0,4]} g$ så gäller $f(x) < g(x)$ då $0 < x < 4$. Vidare gäller $\max_{[4,\infty)} g = \frac{5}{4} < 9 = \min_{(4,\infty)} f$ så att $f(x) > g(x)$ då $4 < x < \infty$. Alltså finns inga lösningar $x > 0$ till $g(x) = f(x)$. Se graf nedan.

5. **a)** Antag att f är definierad för $I \setminus \{a\}$ där I är ett intervall runt a. Då gäller att

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

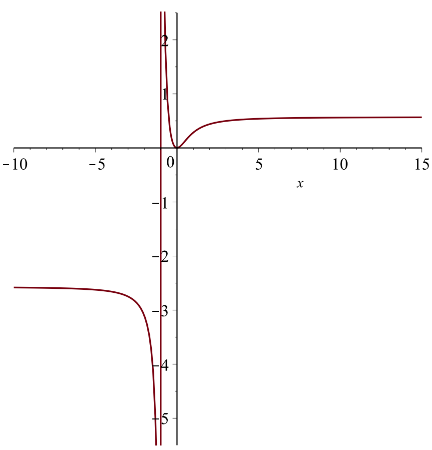
b) Kontinuitet för funktionen $f(x) = \ln|3x^2+4|$ ger att $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4\ln 2$. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och antag $|x-2| < \delta$. Då f är definierad och deriverbar på hela $\mathbb{R}$ och därmed i närheten av $x = 2$, ger medelvärdessatsen att $|f(x)-f(2)| = |f'(\xi)(x-2)|$ för något ξ mellan x och 2. Vidare är $f'(x) = \frac{6x}{3x^2+4} \equiv g(x)$. Då g är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ så antar den på ett slutet, begränsat intervall ett största värde. Då gränsvärdet då $x \to \pm\infty$ är noll måste detta lokala största värde på ett tillräckligt stort slutet intervall faktiskt också vara ett globalt största värde. Man kan med teckenstudietabell med derivatan (som blir ännu enklare om man observerar att g är en udda funktion) ge ett precist värde för maximum, men det behövs inte för vår del; så vi gör bara en grov uppskattning: $|g(x)| \leq \frac{6|x|}{3x^2+4} \leq \begin{cases} \frac{6}{3x^2+4} \leq \frac{6}{4} \leq 2 & \text{för } |x| \leq 1 \\ \frac{6|x|^2}{3x^2+4} \leq \frac{2(3x^2+4)}{3x^2+4} \leq 2 & \text{för } |x| > 1 \end{cases}$. Alltså gäller $|f(x)-f(2)| = |f'(\xi)(x-2)| \leq 2|x-2| \leq 2\delta = \varepsilon$ om vi väljer $\delta = \varepsilon/2$. Så givet godtyckligt $\varepsilon > 0$ kan vi finna $\delta > 0$; nämligen $\delta = \varepsilon/2$. Samma räkning som ovan visar att detta val gör definitionen av $\lim_{x\to 2} f(x) = 4\ln 2$ uppfyllt.

6. (a) Låt $f(x) = e^x$ och $a < b$. Medelvärdessatsen ger $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ för något ξ sådant att $a < \xi < b$. Då $f'(x) = e^x$ och f är strängt växande gäller påståendet.
   Svar: Sant.

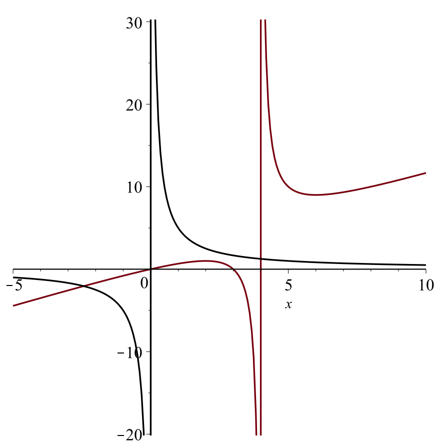
   (b) Vi har för $x > 0$ enligt förutsättning och medelvärdessatsen att $f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0) \geq cx$ varav följer $\lim_{x\to\infty} f(x) \geq \lim_{x\to\infty} (f(0)+cx) \geq k$ för varje konstant $k \in \mathbb{R}$. Alltså gäller $V_f \supset [f(0), \infty)$ enligt satsen om mellanliggande värde ty f är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ då ju f är deriverbar där. Om nu $x < 0$ har vi $f(0) - f(x) = f'(\xi)(0-x) \geq c(-x)$ för något ξ sådant att $x < \xi < 0$. Alltså gäller $f(x) < f(0) + cx$ för alla $x < 0$. Därför gäller $\lim_{x\to-\infty} f(x) < f(0) + c \lim_{x\to-\infty} x \leq k$ för alla $k \in \mathbb{R}$, vilket ger $V_f \supset (-\infty, f(0)$ medsamma argument som ovan. Alltså gäller $V_f = \mathbb{R}$.
   Svar: Sant.

   (c) Vi har att $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ båda är strängt avtagande. För $x, y \in \mathbb{R}$ sådana att $x < y$ gäller $g(x) > g(y)$. Då nu $g(x)$ och $g(y)$ är reella tal sådana att $g(y) < g(x)$ och f är strikt avtagande gäller alltså $f(g(y)) > f(g(x))$; dvs för $x < y$ gäller $f(g(x)) < f(g(y))$ så att $f \circ g$ är strikt växande.
   Svar: Sant.

7. Se kursboken.



Graf uppg. 3



Graf uppg. 4