MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2014-10-30, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Anna Persson, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2014 inkluderas.) Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter skrivningstidens slut. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1415/

OBS: Även för uppgift 1) skall nu (kortare, motiverande) svar inlämnas.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in kortfattade svar**. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) Finn i de olika fallen *i)* - *iii)*, de tal x för vilka gäller: *i)* $|x| > -1$, *ii)* $|x| \leq -1$, *iii)* $|x+1| < 1$. (2p)

   b) Bestäm de reella konstanterna a och b så att ekvationssystemet (2p)
   $$\begin{cases} x & - & 2y & = 1 \\ 2x & + & ay & = b \end{cases}$$ saknar lösning.

   c) *i)* En kontinuerlig funktion på ett slutet, begränsat intervall har ett största (och ett minsta) värde på intervallet. Visa med ett exempel att om intervallet **ej** är slutet behöver detta ej gälla; d v s den kontinuerliga funktionen behöver ej ha ett största värde på intervallet. (2p)
   ii) Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Finns då en funktion $f:\ A \to B$ sådan att värdemängden $V_f = B$?

   d) Relationen $y\cos x = 1 + \sin(xy)$ beskriver lokalt runt punkten $(0, 1)$, y som en funktion, $y = y(x)$, av x. Bestäm ekvationen för den linje som är tangent i punkten $(0, 1)$ till kurvan $y = y(x)$. (2p)

   e) Bestäm om möjligt: (2p)
   i) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1}{x^2 + \tan(x-1) - x}\right)^{11}$, *ii)* de $x \in \mathbb{R}$ för vilka funktionen $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$ är deriverbar och bestäm för dessa x, derivatan av funktionen.

   f) Låt $f(x) = 3x^9 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. Visa att f är inverterbar och bestäm $(f^{-1})'(-8)$; eller visa att f ej är inverterbar. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt π vara planet i $\mathbb{R}^3$ med ekvation $x - y + z = 1$ och betrakta punkten $P_0 = (1, 1, 2)$.

   a) Bestäm en ekvationen för det plan som är parallellt med π och innehåller punkten P_0. (2p)

   b) Bestäm avståndet d mellan P_0 och planet π. (2p)

   c) Bestäm den, till punkten P_0, närmaste punkten i planet π. (2p)

   d) Bestäm ekvationerna för de plan förutom π, som har avståndet d till P_0. (2p)

Var god vänd!

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \arctan(x) - \frac{x}{x+1}$. Ange definitionsmängd D_f, värdemängd V_f och alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet). (6p)

4. Låt för $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{x-4}$ och $g(x) = \dfrac{5}{x}$. Skissa graferna till f och g, bestäm värdemängderna för funtionerna och ange antalet positiva lösningar $x > 0$ till ekvationen $\dfrac{5}{x} = \dfrac{x(x-3)}{x-4}$. (6p)

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x\to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 2} \ln|3x^2 + 4|$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   a) Antag att $a, b \in \mathbb{R}$ och att $a < b$. Då gäller $e^a < \dfrac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$.

   b) Om f är en deriverbar funktion, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sådan att för alla x gäller $f'(x) \geq c > 0$ för någon konstant c (som ej beror på x), så gäller att $V_f = \mathbb{R}$.

   c) Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara strikt avtagande funktioner. Då gäller att sammansättningen $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är strikt växande.

7. a) Bevisa att om en deriverbar funktion har ett lokalt minimum i punkten $x = a$ så är $f'(a) = 0$. (3p)

   b) Formulera medelvärdessatsen (med alla förutsättningar). (2p)

VA