MATEMATIK
Chalmers

Lösningar till tentan för TMV157 2015-01-05

1. OBS: Även för uppgift 1) skall ju nu (kortare, motiverande) svar inlämnas. Glöm inte att du i vissa uppgifter lätt kan kontrollera ditt svar!

   a) Den utökade koefficientmatrisen för systemet övergår genom radoperationer till trappstegsform:

   $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Härav framgår lösningen. **Svar:** $\mathbf{x = -5,\ y = 0,\ z = 3}$

   b) Kedjeregeln:

   $$\frac{d}{dx}\frac{1}{(f(x))^2+1}|_{x=4} = \frac{-1}{((f(x))^2+1)^2}2f(x)f'(x)|_{x=4} = \frac{-1}{((f(4))^2+1)^2}2f(4)f'(4)$$

   Med $f(4) = 1,\ f'(4) = -4$ får vi:

   Svar: 2

   c) Lös ut x ur ekvationen $y = f(x)$. Vi får då $x = 2 \pm \sqrt{4+y}$. Eftersom $x \leq 2$ måste vi välja minustecknet. Om vi presenterar inversen som funktion av x, har vi

   Svar: $\mathbf{f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4+x}}$

   d) $y = \arccos(\cos(-\frac{\pi}{3})) \iff \cos y = \cos(-\frac{\pi}{3}),\ 0 \leq y \leq \pi \iff y = \frac{\pi}{3}$

   Svar: $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

   e) i. Med $f(x) = \cos x$ och $g(x) = \frac{\pi}{2} - x$ har vi både $f(x) \to 0$ och $g(x) \to 0$ då $x \to \frac{\pi}{2}$, så vi kan använda l´Hôpitals regel.

   $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\sin x}{-1} \to 1$ då $x \to \frac{\pi}{2}$. Enligt l'Hôpitals regel har den ursprungliga kvoten samma gränsvärde.

   Alternativt: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ **Svar: 1**

   ii. $\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{10}} = \left(\left(1+\frac{5}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{10}} \to (e^5)^{\frac{1}{10}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ **Svar:** $\sqrt{\mathbf{e}}$

   f) $\boldsymbol{u}$ parallell med $\boldsymbol{w}$:

   $$\boldsymbol{u} = t\boldsymbol{w} \quad \text{för något reellt tal } t$$

   $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ vinkelrät mot $\boldsymbol{w}$:

   $$(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\bullet\boldsymbol{w} = 0 \iff (\boldsymbol{v}-t\boldsymbol{w})\bullet\boldsymbol{w} = 0 \iff \boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{w} - t\boldsymbol{w}\bullet\boldsymbol{w} = 0 \iff t = \frac{\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}\bullet\boldsymbol{w}}$$

   Därmed är $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}\bullet\boldsymbol{w}}\boldsymbol{w} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **Svar:** $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

2. a) Avståndet är

$$\frac{\left|\vec{AC}\times\vec{AB}\right|}{|\vec{AB}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right|}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}$$

Svar: Avståndet är $\sqrt{\frac{7}{3}}$

b) Ställ upp linjernas ekvationer i parameterform (använd $\vec{AC}$ och $\frac{1}{2}\vec{CD}$ som riktningsvektorer):

$$L_1:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-s\\-3+2s\\4-s\end{pmatrix}$$

$$L_2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-3t\\3t\\2-t\end{pmatrix}$$

Linjernas eventuella skärningspunkt är lösning till det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{cases}3-s&=&3-3t\\-3+2s&=&3t\\4-s&=&2-t\end{cases}$$

Vi ser då att det finns en lösning $s=3,\ t=1$, vilket svarar mot en och samma punkt vid insättning i respektive linjes ekvationer, nämligen $(0,3,1)$.

Svar: Skärningspunkten är $(\mathbf{0},\mathbf{3},\mathbf{1})$

c) Vi har redan en nomalvektor till planet: $\vec{AC}\times\vec{AB}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Då vet vi att planet har en ekvation av typen $x+2y+3z=D$. Insättning av vilken som helsta av de fyra punkterna ska ge D, kontrollera gärna alla! Man får $D=9$

Svar: planet har ekvationen $\mathbf{x+2y+3z=9}$

3. Vi konstaterar att vår funktion $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ är definierad för alla $x > 0$. Det är lätt att se att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$. Eftersom $f(x) = \frac{1-4\sqrt{x}}{2x}$, så kan vi se att täljaren går mot 1 och nämnaren mot 0^+ då $x \to 0^+$. Alltså: $f(x) \to +\infty$ då $x \to 0^+$.

Vi undersöker derivatan och dess teckenvariation:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}} = x^{-2}(-\frac{1}{2} + \sqrt{x})$$

Derivatans enda nollställe är tydligen $x = \frac{1}{4}$. För översikt och slutsatser gör vi en teckentabell:

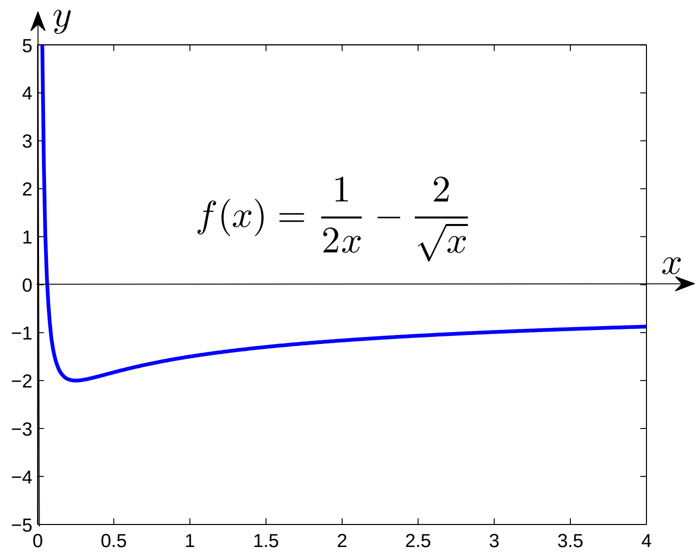
x	0		$\frac{1}{4}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

Funktionen har en enda lokal (och global) extrempunkt: $x = \frac{1}{4}$ är lokalt (och globalt) minimum. Värdemängden är $\mathcal{V}_f = [-2, \infty)$.
Asymptoter är $x = 0$ och $y = 0$ (dvs koordinataxlarna).

Vi undersöker också andraderivatan:

$$f''(x) = x^{-3} - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}) = \frac{3}{2}x^{-3}(\frac{2}{3} - \sqrt{x})$$

Den växlar tecken från positiv till negativ i $x = \frac{4}{9}$, vilket betyder att $x = \frac{4}{9}$ är inflexionspunkt, och att funktionen är konvex till vänster och konkav till höger om denna punkt.



Svar: Asymptoter: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, lokal minimipunkt: $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$, f är konvex i $(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}})$, konkav i $(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}, \infty)$.

4. Eftersom logaritmen bara existerar för positiva tal, så är f definierad då $-1 < x < 0$ och då $0 < x < \infty$, dvs definitionsmängden är $\mathcal{D}_f = (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

Vi konstaterar att $f(x) \to \infty$ då $x \to 0^+$ och då $x \to \infty$, samt att $f(x) \to -\infty$ då $x \to 0^-$ och då $x \to -1^+$.

För att ta reda på funktionens variationer i övrigt, behöver vi dess derivata:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2(x+1)} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x^2(x+1)}$$

Derivatans nollställen är alltså $x = -\frac{1}{2}$ och $x = 1$. En teckentabell med alla fakta vi funnit:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2-\ln 4$	$\searrow$	$-\infty/+\infty$	$\searrow$	$1+\ln 4$	$\nearrow$	0

De lokala extremvärdena har förenklats en aning: lokalt maximum $-2 + 2\ln\frac{1}{2} = -2 - 2\ln 2 = -2 - \ln 2^2$ samt lokalt minimum $1 + 2\ln 2 = 1 + \ln 2^2$. Av funktionens kontinuitet följer att den antar alla värden i intervallen $(\infty, -2 - \ln 4]$ och $[1 + \ln 4, \infty)$.

Svar: $\mathcal{D}_\mathbf{f} = (\mathbf{-1, 0}) \cup (\mathbf{0}, \infty)$, $\mathcal{V}_\mathbf{f} = (\infty, \mathbf{-2} - \ln \mathbf{4}] \cup [1 + \ln 4, \infty)$.

5. **a)** Antag att f är definierad för $I \setminus \{a\}$ där I är ett intervall runt a. Då gäller att

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

b) Kontinuitet för funktionen $f(x) = x^2 + 4$ ger att $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 8$. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och tag $\delta = \min[1, \varepsilon/5]$. Vi vill uppskatta $|f(x) - L| = |x^2 + 4 - 8| = |x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2||x-2|$. Om nu $|x - 2| < \delta$ så gäller alltså $|x - 2| < \delta \leq 1$ som ger att $1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x + 2 < 5 \Rightarrow |x + 2| < 5$. Alltså gäller för givet $\varepsilon > 0$ att vi kan ta $\delta = \min[1, \varepsilon/5]$ och då gäller med detta val av δ att om $|x - 2| < \delta$ så har vi att $|x^2 + 4 - 8| = |(x + 2)(x - 2)| = |x + 2||x - 2| < 5|x - 2| < 5\delta \leq 5(\varepsilon/5) = \varepsilon$; d v s definitionen av att $\lim_{x\to 2}(x^2 + 4) = 8$ är uppfylld.

MATEMATIK
Chalmers

---

6. a) Bilda vektorer av de tre sidorna, ta skalärprodukten mellan dessa två och två. Om någon av produkterna blir noll, har vi rät vinkel mellan motsvarande sidor i triangeln. Så blir det också om man tar de sidor som har punkten $(2, -3, 1)$ gemensam, så vinkeln i det hörnet är rät. **Sant.**

   b) Derivera och förenkla derivatan. Vi får $f'(x) = 0$ för alla $x \neq 0$. Det innebär att f är konstant i vardera intervallet $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Då $f(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ och $f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$, så är värdena olika i dessa två intervall, funktionen har bara dessa två värden. **Sant.**

   c) Antag att $p(x)$ har ett nollställe $x = a$ av ordning n. Då kan vi alltså skriva $p(x) = (x-a)^n q(x)$, där $q(x)$ är ett polynom med $q(a) \neq 0$. deriverar vi så får vi $p'(x) = n(x-a)^{n-1}q(x) + (x-a)^n q'(x) = (x-a)^{n-1}(nq(x) + (x-a)q'(x)) = (x-a)^{n-1}q_1(x)$, där $q_1(x) = nq(x) + (x-a)q'(x)$ är ett polynom. Här blir $q_1(a) = nq(a) \neq 0$, vilket innebär att $p'(x)$ har nollställe av ordning $n-1$ i $x = a$, inte av ordning n. **Falskt.**

7. Se Adams!