MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2015-01-05, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Dawan Mustafa, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2014 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1415/
Examinator: Vilhelm Adolfsson.

---

1. **OBS:** Även för uppgift 1) skall nu (kortare, motiverande) svar inlämnas.
   Glöm inte att du i vissa uppgifter lätt kan kontrollera ditt svar!

   a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 5 \\ x + y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 8z = 9 \end{cases}$$

   b) Beräkna derivatan av $\dfrac{1}{(f(x))^2+1}$ i punkten $x = 4$, (2p)
   då $f(4) = 1,\ f'(4) = -4$.

   c) Bestäm inversa funktionen till funktionen $f(x) = x^2 - 4x$ definierad (2p)
   för $x \leq 2$, och ange inversens definitionsmängd.

   d) Bestäm $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3}))$. (2p)

   e) Beräkna följande gränsvärden: (2p)

   i. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$ ii. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{10}}$

   f) Bestäm en vektor $\boldsymbol{u}$ som är parallell med $\boldsymbol{w}$ och sådan att $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ är (2p)
   vinkelrät mot $\boldsymbol{w}$, när $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (dvs bestäm den
   ortogonala projektionen av $\boldsymbol{v}$ på $\boldsymbol{w}$).

Var god vänd!

MATEMATIK
Chalmers

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Linjen L_1 går genom punkterna $A = (3, -3, 4)$ och $B = (2, -1, 3)$, och linjen L_2 går genom punkterna $C = (3, 0, 2)$ och $D = (-3, 6, 0)$. (8p)
   a) Beräkna avståndet från punkten C till linjen L_1.
   b) Linjerna L_1 och L_2 har en skärningspunkt, bestäm den!
   c) Bestäm en ekvation för planet som innehåller linjerna L_1 och L_2.

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. Ta också reda på var funktionen är konvex och konkav (concave up/down). (6p)

4. Bestäm definitionsmängden och värdemängden för funktionen $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x+1)$. (6p)

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x\to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 2} x^2 + 4$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. **Svaren ska motiveras**. (2+2+2p)
   a) Triangeln med hörn i punkterna $(3, -2, -1)$, $(2, -3, 1)$ och $(5, -2, 3)$ är rätvinklig.
   b) Funktionen $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, antar bara två värden. (Undersök derivatan!)
   c) Att ett polynom $p(x)$ har ett *nollställe* $x = a$ *av ordning* n (där n är ett heltal ≥ 1) betyder: $p(x) = (x-a)^n q(x)$, där $q(x)$ är ett polynom med $q(a) \neq 0$. Påstående: om $p(a) = 0$ och $p'(a) = 0$, så kan nollstället $x = a$ ha *samma ordning* för $p(x)$ och $p'(x)$.

7. a) Skriv det gränsvärde som definierar *derivatan* av en funktion f i en punkt x. (2p)
   b) Bevisa att om en deriverbar funktion f definierad i intervallet (a, b) har ett maximum i en punkt $c \in (a, b)$, så är $f'(c) = 0$. (4p)

VA