Inledande Matematik E, TMV157, 150826

1) a) Finn den polära formen $re^{i\theta}$ för $3+\sqrt{3}i$ given på kartesiska formen. Vi har $3+\sqrt{3}i = re^{i\theta}$ så att

$r = |re^{i\theta}| = |3+i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ $\therefore$ $\cos\theta + i\sin\theta =$
$= (3+i\sqrt{3})/2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow \theta = \pi/6$

$\therefore (3+i\sqrt{3})^{258} = (2\sqrt{3}\,e^{i\pi/6})^{258} = (2\sqrt{3})^{258} e^{i\frac{258\pi}{6}} =$

$= (4\cdot 3)^{129} e^{i43\pi} = (12)^{129} e^{i\pi} = 12^{129}(\cos\pi + i\sin\pi) = -12^{129}$

b) $\text{Proj}_v(u) = \frac{u\cdot v}{|v|^2} v = \frac{5}{(\sqrt{1^2+0^2+1^2})^2}(1,0,1) = \frac{5}{2}(1,0,1) = \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

c) $y = y(x)$ och implicit derivering av $2x+y-\sqrt{2}\sin(xy) = \frac{\pi}{2}$ ger
$2+y'-\sqrt{2}\cos(xy)(y+xy') = 0$ som ger $0 = 2+y'(\frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\frac{\pi}{4}y'(\frac{\pi}{4}))$
i punkten $(x,y) = (\frac{\pi}{4},1)$ $\therefore y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi-4}$ $\therefore$ Riktningskoefficient
för normallinjen $k_N = \frac{-1}{k_T} = \frac{-1}{4/_{\pi-4}} = \frac{4-\pi}{4}$ så normallinjens
ekvation är $y-1 = \frac{4-\pi}{4}(x-\frac{\pi}{4})$

d) $f^{-1}(f(x)) = x$ ger vid derivering att $1 = (f^{-1})'(f(x))\,f'(x)$
Vi ser att $f(2) = \ln\sqrt{1+2^3} = \ln\sqrt{9} = \ln 3$ Vidare är
$f(x) = \ln\sqrt{1+x^3} = \frac{1}{2}\ln(1+x^3)$ så $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^3}3x^2$ och $f'(2) = \frac{2}{3}$

$\therefore (f^{-1})'(\ln 3) = 1/f'(2) = 1/{}_{2/3} = \frac{3}{2}$

e) i) Vi ser att $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x$ är på formen $\infty-\infty$. Vi förlänger

$\sqrt{x^2+x}+x = \frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{\sqrt{x^2+x}-x} = \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} =$

1e) forts) $= (\text{då } x \to -\infty) = \dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = -\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$

då $x \to -\infty$ så $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}+x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right) = -\dfrac{1}{2}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{\sin x} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} = (\text{l'Hôpital}) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-0}}}{1} = 1$

f) Inga $a \in \mathbb{R}$; lösningar till linjära ekv. syst har 0, 1 eller oändligt många.

2) a) $v_1 = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2,-1,3)-(3,-3,4) = (-1,2,-1)$; pss $v_2 = \vec{CD} = (-6,6,2)$

Vektorerna v_i är parallella med planet så $v_1 \times v_2$ är normal till planet $n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{vmatrix} = (2,4,6) = 2(1,2,3)$ så tag $n = (1,2,3)$

$\Rightarrow$ planets ekv $x+2y+3z = D = (\text{ty } C \in \text{planet}) = 1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 = 9$

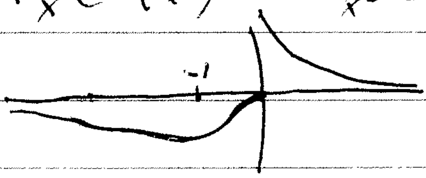
$\Leftrightarrow x+2y+3z=9$

b) Vektorerna $(1,1,-1)$ och $(2,-1,0)$ är $\perp$ $(1,2,3)$ så planen $x+y-z=1$ och $2x-y=1$ är ortogonala mot planet $x+2y+3z=9$ och innehåller båda punkten $(1,1,1)$. Skärningen av dessa två plan är linjen genom $(1,1,1)$ med riktningsvektor $(1,2,3)$. Övriga plan vinkelräta mot planet $x+2y+3z=9$ ges då som "pencil of planes" runt skärningslinjen av dessa två plan: $x+y-z-1+\lambda(2x-y-1)=0$ där $\lambda \in \mathbb{R}$, samt planet $2x-y-1=0$ (som motsvarar "$\lambda \sim \infty$").

3) $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x}$, $D_f = \{x \neq 0\}$ Vi ser direkt att $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ och $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ För $x \to 0^-$ sätter vi $t = -\frac{1}{x}$ och har $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{t\to\infty} -te^{-t} = 0$

Vidare är $f' = -\dfrac{1}{x^2}e^{1/x} + \dfrac{1}{x}e^{1/x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^3}e^{1/x}(1+x)$ så att

x		-1		0	
f'	$-$	0	$+$	ej	$-$
f	↘	$-e^{-1}$	↗	def	↘



Globalt min: $(-1, -e^{-1})$

Lodräta as: y-axeln och x-axeln

4) Vi har att $D_f = \{x \neq -2\}$. Då värdemängden för sin är -1 till 1 så är värdemängden för f för $x > -2$ intervallet $[2,4]$. För $x > -2$ ser vi att $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Vidare är $f'(x) = \dfrac{2x(x+2) - (x^2-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$ för $x > -2$

Teckenstudie för $x > -2$

x	-2	-1	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$\therefore V_{f|_{(-2,\infty)}} = [-2, \infty)$

och då värdena för f för $x < -2$ ingår i intervallet $[-2,\infty)$

● så är värdemängden för f, $V_f = [-2, \infty)$

5) Se uppg. 5) tentan 150105

6) Vi behöver normalens ekvation i punkten P. Derivatan för $f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ är $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Då är alltså normalens riktningskoeff. $k_N = -1/k_T = -(s+1)^2$ så normalens ekvation i (s,t) är $y - \frac{s}{s+1} = -(s+1)^2(x-s)$. För Q är $y=0$ som hör normalens ekvation ger $-\frac{s}{s+1} = -(s+1)^2(x-s) \Rightarrow x = s + \frac{s}{(s+1)^3}$. Då $R = (s,0)$

● så har vi $|\overrightarrow{QR}| = s/(s+1)^3$, $|\overrightarrow{PR}| = \frac{s}{s+1}$ och triangelarean blir då $A(s) = s^2/2(s+1)^4$. Vi har att $A(s) \to 0$ då $s \to 0^+$ och $s \to \infty$. Då A är positiv, begränsad och deriverbar för $s > 0$ så måste A anta maximum och där är $f' = 0$.

Vi har

$$A'(s) = \frac{2s(s+1)^4 - 4s^2(s+1)^3}{2(s+1)^8} = \ldots = \frac{s(1-s)}{(s+1)^5}$$

med $s=1$ som enda positiva nollställe som alltså måste vara maximipunkten. ∴ $P = (1, 1/2)$.

7 a) Se kurslitteraturen. b) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$ så $f(x) = $ konst i varje sammanhängande intervall i definitionsmängden. Då $f(1) = \frac{\pi}{2}$ och $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ gäller alltså $f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $x<0$ och $f(x) = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$ så f antar bara två värden; $\{\pm\frac{\pi}{2}\}$