Lösningsförslag Inledande Matematik E, TMV157, 151029

1 a) i) $D\left(\frac{\cos x}{2+\sin x}\right) = \frac{-\sin x(2+\sin x) - \cos x \cos x}{(2+\sin x)^2} = -\frac{1+2\sin x}{(2+\sin x)^2}$

ii) $D(\sin(x+\sin(2x))) = \cos(x+\sin(2x))(1+\cos(2x)\cdot 2) = (1+2\cos(2x))\cos(x+\sin(2x))$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & a+4 & b-2 \end{array}\right)$ Om $a+4 \neq 0$ så är $a+4$ pivotelement och då finns unik lösning för $\forall b$. Om $a+4=0$ så finns ingen lösning om $b-2\neq 0$, och om $b-2=0$ så finns oändligt många lösningar som ges av $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim (1 \; -2 \,|\, 1)$ som har lösning $y=t\in\mathbb{R}$, $x=2t+1$ så att lösningarna är $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t \\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1\end{pmatrix}$

c) i) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = (\text{l'Hop}) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+3x}\cdot 3}{\cos x} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{3}{1+3x}}{\lim_{x\to 0}\cos x} = \frac{\frac{3}{1+0}}{1} = 3$

ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + \ln x}{3\cdot 2^x - \ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x\left(1+\frac{\ln x}{2^x}\right)}{2^x\left(3-\frac{\ln x}{2^x}\right)} = \frac{1+0}{3-0} = 1/3$

iii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{2^x+\ln x}{3\cdot 2^x - \ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\ln x}\left(1+\frac{2^x}{\ln x}\right)}{\cancel{\ln x}\left(-1+\frac{3\cdot 2^x}{\ln x}\right)} = \frac{1+0}{-1+0} = -1$

d) Enligt medelvärdessatsen gäller $6-(-1) = f(3)-f(0) = f'(\xi)(3-0) \leq$
$\leq 2\cdot 3 = 6 \iff 7 \leq 6$ som ej är sant. Alltså finns ingen sådan f.

e) Låt i $\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{4}{3}\right)$, $\alpha \equiv \arctan\frac{4}{3} \iff \tan\alpha = 4/3$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

Additionsformler ger $\cos(2\beta) = \cos(\beta+\beta) = \cos\beta\cos\beta - \sin\beta\sin\beta = 2\cos^2\beta - 1$

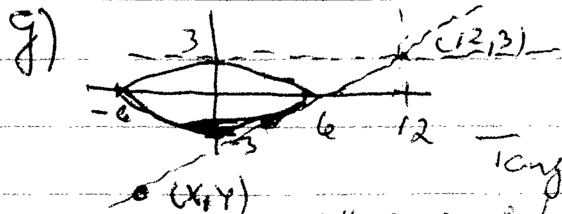
$\therefore \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = (+)\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, ty $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Från $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ fås $3\sin\alpha = 4\cos\alpha$

$\Rightarrow 16\cos^2\alpha = 9\sin^2\alpha = 9(1-\cos^2\alpha)$ $\therefore 25\cos^2\alpha = 9 \Rightarrow \cos\alpha = (+)\frac{3}{5}$

$\therefore \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{3}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = 2/\sqrt{5}$

f) $f(x) = 3x^5+5x^3+x$, $f'(x) = 15x^4+15x^2+1 > 0 \Rightarrow f$ strängt växande $\Rightarrow f^{-1}\ \exists$ och $f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow (f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ och $f(0)=0$, $f'(0)=1 \Rightarrow$
$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{1} = 1$

g)



Antag $y=y(x)$ och implicit derivering $\Rightarrow$
$2x+8yy'=0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{4y}$
Tangentens ekv. $y'(x) = k = \frac{y-3}{x-12} = -\frac{x}{4y}$ $\Rightarrow$ Antag nu att (x,y) på tangenten också är på ellipsen, dvs (x,y) är tangeringspunkten

1 g) forts. $\frac{y-3}{x-12} = -\frac{x}{4y} \Rightarrow 4y^2+x^2 = 12(x+y)$ och om punkten (x,y) på tangenten är tangeringspunkten har vi $12(x+y) = x^2+4y^2 = 36$
$\Rightarrow y = 3-x$ Insättning i ellipsens ekv. ger $x^2+4(3-x)^2 = 36 \Leftrightarrow$
$x^2+4(x^2-6x+9) = 36 \Leftrightarrow (5x-24)x = 0 \Leftrightarrow x=0$ eller $x = 24/5$
För fall $x=0$: $\frac{y-3}{x-12} = -\frac{0}{4\cdot 3} = 0 \Rightarrow \boxed{y=3}$ då (x,y) punkt på tang.

För fall $x = 24/5$: $\Rightarrow y(24/5) \Rightarrow \frac{6^2\cdot 4^2}{5^2} + 4y^2 = 36 \Rightarrow$
$y^2 = 9 - \frac{6^2\cdot 4}{5^2} = \dots = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \Rightarrow y\left(\frac{24}{5}\right) = \frac{9}{-5} \Rightarrow$

- $\frac{y-3}{x-2} = -\frac{24/5}{4\left(-\frac{9}{5}\right)} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}}$

---

2) Låt l_1 vara linjen genom $P_1 = (1,-1,-2)$ och $P_2 = (2,0,1)$
$\Rightarrow (x,y,z) = \overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{P_1P_2} = (1,-1,-2)+t(1,1,1)$ för $(x,y,z) \in l_1$
Låt l_2 vara linjen $x-2 = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4} \Rightarrow$

$(x,y,z) = (2,-3,1)+s(1,2,4)$

- a) Planet π har normal $n = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$ där
$P_1 = (1,1,1)$, $P_2 = (1,-1,-3)$ och $P_3 = (2,2,3)$
så att $n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(0,2,-1)$ .. π: $2y - z = -1$

Då riktningsvektorn för linjen l_1 är $(1,1,1)$ och
$(1,1,1)\cdot(0,2,-1) = 0+2-1 = 1 \neq 0$ så är linjen ej parallell med planet utan skär alltså planet och har då avstånd 0.
Avståndet mellan l_2 och planet π ges av avståndet mellan någon punkt på l_2 och planet ty l_2 parallell med planet då ju $(1,2,4)\cdot(0,2,-1) = 0+4-4 = 0$. Detta avstånd $d = \text{dist}((2,-3,1),\pi) =$
$= \frac{|2(-3)-1-1|}{\sqrt{0^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{8}{\sqrt{5}}}}$

b) Linjen med största avstånd är l_2 som ju är // med planet och alltså går det linje ett plan som är // med π och innehåller l_2. Ett sådant plan har ekv. $2y - z = D$ och då $(2,-3,1) \in l_2$ så fås $\boxed{2y - z = -7}$

c) Då det sökta planet ska innehålla linjen l_2 måste planets normal vara $\perp$ mot riktningsvektorn för l_2. Dessutom måste ju normalen vara $\perp$ mot normalen $(1,1,1)$ till planet $x+y+z=1$

$\therefore$ $n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-3,1)$

$\therefore$ Sökt plan är $2x - 3y + z = D$ och då punkten $(2,-3,1) \in l_2 \subseteq$ planet så är $D = 14$

$\therefore$ sökt plan är $\boxed{2x - 3y + z = 14}$

d) Planen som innehåller l_2 ges som pencil of planes av planen $2y - z = -7$ och $2x - 3y + z = 14$ som ju ~~har~~ en skärningslinje som är l_2

Pencil of planes ges av $2x-3y+z=14$ eller

$$2y - z - 7 + \alpha(2x - 3y + z - 14) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\iff$ $2\alpha x + (2-3\alpha)y + (\alpha - 1)z - 7 - 14\alpha = 0$

som är ekv. till ett plan med normal $(2\alpha, 2-3\alpha, \alpha-1)$ och om detta plan // med $x+y+z=1$ gäller att dess normaler //; dvs $\exists\, \beta \in \mathbb{R}$ s.a. $(2\alpha, 2-3\alpha, \alpha-1) = \beta(1,1,1)$, men inget sådant $\beta \in \mathbb{R}$ finns ej; alltså finns inget plan // med $x+y+z=1$ och som innehåller l_2.

Lab lösning TMV157 151029

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$, $D_f = \{x^2-3x+2>0\} = \mathbb{R}\setminus[1,2] =$
$= (-\infty,1) \cup (2,\infty)$

ty $x^2-3x+2>0 \iff (x-1)(x-2)>0$

Vi ser $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

För sneda asymptoter ser vi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-3x+2}}}{x} = \ldots = \pm 1$$

Vi ser vidare att

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (\pm 1)x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-3x+2}} - (\pm 1)x$$

För $x\to+\infty$ har vi $\dfrac{x^2-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-3x+2}} - x =$

$$= \frac{x^2-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2} - x\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2-3x+2}} = \frac{x^2 - x|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} + \left(-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$= A + B$

För A: (då $x\to\infty$)

$$= \frac{x^2\left(1-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}{x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{x\left(1-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}$$

$$= \frac{x\left(1-\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)} = \frac{3-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)} \to$$

$$\to \frac{3-0}{\sqrt{1+0}\left(1+\sqrt{1+0}\right)} = \frac{3}{2} \text{ då } x\to\infty.$$

forts. lösn. TMV157 151029

För B då $\underset{x\to\infty}{}$: $\dfrac{-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}}{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \dfrac{\cancel{x}\left(-\frac{3}{8}+\frac{1}{2x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}}$

$$\to \frac{-\frac{3}{8}+0}{\sqrt{1+0}} = -\frac{3}{8}$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty} h(x)-x = \frac{3}{2}-\frac{3}{8} = \frac{12-3}{8} = \frac{9}{8}$$

Pss gäller $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x)-(-x) = -\frac{9}{8}$

$\therefore$ $y = x+\frac{9}{8}$ är asymptot i $+\infty$

$y = -x-\frac{9}{8}$ — " — $-\infty$

Vidare har vi $f'(x) = \dfrac{\left(2x-\frac{3}{8}\right)\sqrt{x^2-3x+2}-\left(x^2-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}}}{\left(\sqrt{x^2-3x+2}\right)^2}$

$$= \frac{\left(2x-\frac{3}{8}\right)\left(x^2-3x+2\right)-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\right)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^{3/2}} = \ldots =$$

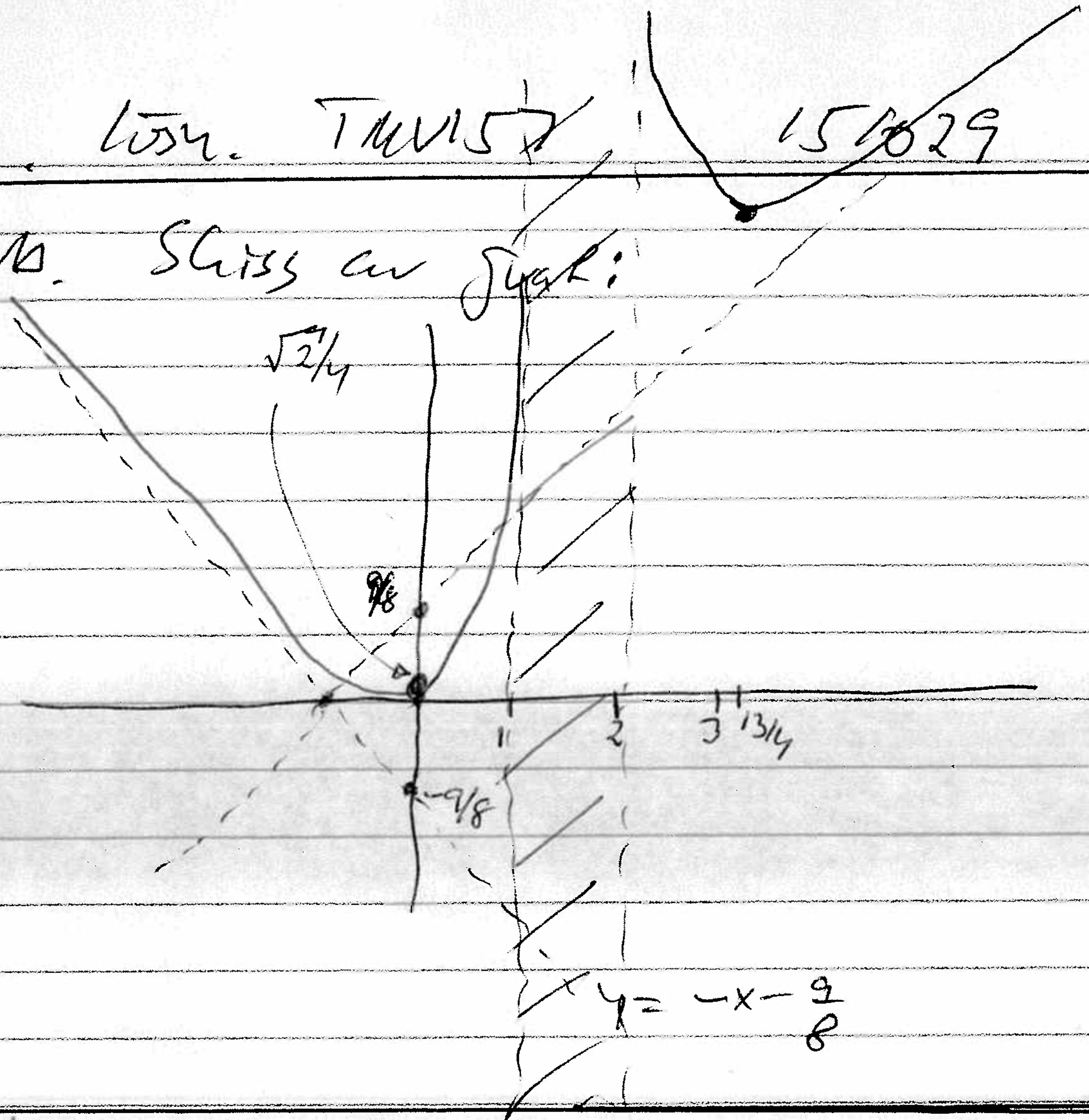
$$= \frac{x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{65}{16}x}{(x^2-3x+2)^{3/2}} = \frac{x\left(x-\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{13}{4}\right)}{(x^2-3x+2)^{3/2}}$$

Teckenstudie:

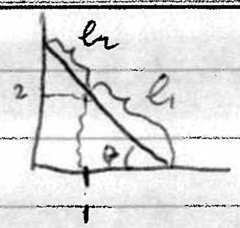
x	$-\infty$		0		1, 5/4, 2		13/4		∞
f'		$-$	0	$+$	ej	$-$	0	$+$	
f	∞	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	def	$\searrow$	$\frac{21\sqrt{5}}{8}$	$\nearrow$	∞

forts. lösn. TMV157 151029

3) forts. Skiss av graf:



4)



$$L(\theta) = l_1 + l_2 = \frac{2}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$0 = L'(\theta) = \frac{-2}{\sin^2\theta}\cos\theta + \frac{1}{\cos^2\theta}\sin\theta =$$

$$= \frac{\sin^3\theta - 2\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} \Rightarrow \tan^3\theta = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\theta = 2^{1/3} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + 2^{2/3}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = (1 + 2^{2/3})^{-1/2}, \quad \sin\theta = \tan\theta\cos\theta =$$

$$= \frac{2^{1/3}}{(1+2^{2/3})^{1/2}} \Rightarrow \min_\theta L(\theta) = (1+2^{2/3})^{1/2} + 2\frac{(1+2^{2/3})^{1/2}}{2^{1/3}} =$$

$$= (1 + 2^{2/3})^{3/2}.$$

Forts. Lösn. TMV157 151029 (7/7)

5) Se uppg. 5 på tentan 141030

6) a) $f(x)=x^3-x-1$, $f'(x)=3x^2-1$, $f'(x)\geq 3-1=2$ på $[1,2]$

$g(x)=x^2$, $g'(x)=2x\to 0$ då $x\to 0$

Då g' är nära noll nära nollstället $x=0$ till $g(x)$ och $f(x)$ inte har derivatan nära noll nära sitt nollställe i $[1,2]$ så kommer för ett "likvärdigt" värde x_n, x_n ha en nästapunkt x_{n+1} som är "längre bort" i fallet g (då ju $g'\approx 0$ och $x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$) så g har en mer långsamt konvergerande Newtoniteration.

b) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{2h}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}=(\text{l'Hôp.})=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)-(f'(x-h)-f'(x))}{2h}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{h}=$$

$$=\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{2}\lim_{k\to 0}\frac{f'(x+k)-f'(x)}{-k}=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f''(x)=f''(x)$$

c) f, g strikt ~~avtagande~~ Antag $x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$ och $g(x)>g(y)$ så $(f\circ g)(x)=f(g(x))<$ (ty $g(x)>g(y)$ och f strikt avtagande) $<f(g(y))=(f\circ g)(y)$ så $f\circ g$ är strikt växande.

$\therefore$ 6 a) b) c) är FSS

7) Se kursliteraturen.