MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2015-10-29, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Edvin Wedin, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2015 inkluderas.) Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter skrivningstidens slut. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1516/

OBS: Även för uppgift 1) skall nu (kortare, motiverande) svar inlämnas.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in kortfattade svar**. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) Derivera följande funktioner: (2p)
   i) $\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$, *ii)* $\sin(x+\sin(2x))$.

   b) Bestäm om möjligt de reella konstanterna a och b så att ekvationssystemet (2p)
   $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + ay = b \end{cases}$ har oändligt många lösningar, samt bestäm också lösningarna.

   c) Bestäm gränsvärdena: (3p)
   i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\sin x}$, *ii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x+\ln x}{3\cdot 2^x - \ln x}$, *iii)* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2^x+\ln x}{3\cdot 2^x - \ln x}$.

   d) Finns det en funktion $f(x)$ sådan att $f(3)=6$, $f(0)=-1$ och $f'(x)\le 2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (2p)

   e) Bestäm exakt: $\cos(\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{4}{3})$. (2p)

   f) Visa att $f(x)=3x^5+5x^3+x$ är inverterbar och beräkna $(f^{-1})'(0)$. (2p)

   g) Bestäm ekvationerna för tangentlinjerna till ellipsen $x^2+4y^2=36$ som går genom punkten $(12,3)$. (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar med motiveringar.

2. Låt ℓ_1 vara linjen i $\mathbb{R}^3$ genom punkterna $(1,-1,-2)$ och $(2,0,-1)$ och låt ℓ_2 vara linjen $x-2=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.

   a) Vilken av linjerna ℓ_1 och ℓ_2 har störst avstånd till det plan π som innehåller punkterna $(1,1,1)$, $(1,-1,-3)$ och $(2,2,3)$? (4p)

   b) Bestäm ekvationen för det plan som är parallellt med π och innehåller den linjen med störst avstånd efterfrågad i a). (1p)

   c) Bestäm om möjligt ett plan som innehåller linjen efterfrågad i a), och som är vinkelrätt mot planet $x+y+z=1$. (2p)

   d) Bestäm om möjligt ett plan som innehåller linjen efterfrågad i a), och som är parallellt med planet $x+y+z=1$. (1p)

Var god vänd!

---

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$. Ange definitionsmängd D_f, värdemängd V_f och alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet). (6p)

4. Finn längden av den kortaste stege som står på golvet lutad mot en vertikal vägg och som en meter från väggen har ett två meter högt staket under sig. (6p)

   Hint: Stegen vilar ju på staketet om den ska vara kortast. Kalla vinkeln stegen bildar mot golvet för θ och uttryck stegens längd i termer av θ.

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (1p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 2} \ln |3x^2 + 4|$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (5p)

   a) Låt $f(x) = x^3 - x - 1$ och $g(x) = x^2$. Funktionen g har ju uppenbarligen ett nollställe i $x = 0$, och f har ett nollställe i intervallet $[1, 2]$. Newtoniteration för att finna approximativa värden på dessa nollställen konvegerar snabbast för funktionen g.

   b) Antag att funktionen f är två gånger deriverbar. Då gäller
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

   c) Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara strikt avtagande funktioner. Då gäller att sammansättningen $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är strikt växande.

7. a) Bevisa att om en deriverbar funktion har ett lokalt minimum i punkten $x = a$ så är $f'(a) = 0$. (3p)

   b) Bevisa att om en funktion är deriverbar i punkt x så är den kontinuerlig där. (2p)

VA