Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2016-01-05, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Tim Cardilin, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2015 inkluderas.) Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1516/

OBS: Även för uppgift 1) skall nu (kortare, motiverande) svar inlämnas.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in kortfattade svar**. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) Gäller $e^{\ln x} = x$ för alla $x \in \mathbb{R}$? (2p)

   b) Bestäm om möjligt de reella konstanterna a och b så att ekvationssystemet $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + ay = b \end{cases}$ har precis en lösning; samt bestäm också lösningen. (2p)

   c) Lös olikheten $|2 - 3x| < 1$. (2p)

   d) Bestäm $a \in \mathbb{R}$ sådant att $(1, 2, a) \cdot (5, 10, -1) = 0$ och bestäm $b \in \mathbb{R}$ sådant att $(1, 2, b) \times (5, 10, -1) = 0$. (2p)

   e) Bestäm derivatan av funktionen $f(x) = \sin(\cos(\sin(x)))$. (2p)

   f) Är $f(x) = |x|x^3$ inverterbar; beräkna i så fall $(f^{-1})'(-9/4)$. (2p)

   g) Bestäm om möjligt konstanterna a och b så att funktionen (2p)

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x < 2 \\ ax^2 + b, & x \geq 2 \end{cases}$$

   blir deriverbar i $x = 2$; och bestäm i så fall också derivatan $f'(2)$.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar med motiveringar.

2. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller skärningspunkten till linjen $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$ och planet $2x + 2y + z = 7$, samt är ortogonalt mot båda. (6p)

Var god vänd!

---

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \arctan x^2$. Ange definitionsmängd D_f, värdemängd V_f och alla eventuella lokala extrempunkter, singulära punkter och asymptoter. Redogör för var funktionen växer respektive avtar. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet). (6p)

4. Finn längden av den kortaste stege som står på golvet lutad mot en vertikal vägg och som en meter från väggen har ett två meter högt staket under sig. (6p)

   Hint: Stegen vilar ju på staketet om den ska vara kortast. Kalla vinkeln stegen bildar mot golvet för θ och uttryck stegens längd i termer av θ.

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 2} x^3$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   a) Låt $v = \arctan 5$. Då gäller att $\sin v = 5/\sqrt{26}$.

   b) Det komplexa talet $1 - i\sqrt{3}$ är en lösning till ekvationen $z^6 = -64$.

   c) Låt $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 20x$. Då gäller $f'(x) = 16$ för något $x \in (0, 1)$.

7. a) Bevisa att om en deriverbar funktion har ett lokalt minimum i punkten $x = a$ så är $f'(a) = 0$. (3p)

   b) Bevisa att om en funktion är deriverbar i punkt x så är den kontinuerlig där. (3p)

VA