MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2016-08-24, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Edvin Wedin, tel ankn 5325, 031-7725325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2015 inkluderas.) Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1516/

OBS: Även för uppgift 1) skall nu (kortare, motiverande) svar inlämnas.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in kortfattade svar**. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) i. Gäller $\ln(e^x) = x$ för alla $x \in \mathbb{R}$? (2p)

      ii. Gäller $\arctan(\tan x) = x$ för alla $x \in \mathbb{R}$?

   b) Lös ekvationen $|x+1| + |x-2| = 6$. (2p)

   c) Beräkna följande gränsvärden (3p)

      i. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$,

      ii. $\lim_{x\to 0} (\sqrt{1-x^2})^{1/x^4}$

      iii. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

   d) Låt $a < b$. Bevisa om möjligt att ekvationen $\dfrac{1}{(x-a)^4} + \dfrac{2}{(x-b)^9} = 0$ har minst en lösning i intervallet (a, b). (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar med motiveringar.

2. a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $(1,1,1)$, $(2,2,3)$ och $(1,0,-3)$. (3p)

   b) Bestäm ortogonala projektionen av en vektor längs linjen $(x,y,z) = (1,1,1) + t(1,2,3),\ t \in \mathbb{R}$ på planet $x + 2y + 3z = 1$. (3p)

   c) Bestäm avståndet mellan $(1,2,0)$ och planet $3x - 4y - 5z = 2$. (3p)

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$. Ange definitionsmängd D_f, värdemängd V_f och alla eventuella lokala extrempunkter, singulära punkter och asymptoter. Redogör för var funktionen växer respektive avtar. Utred även funktionens konvexitet/konkavitet och ange eventuella inflexionspunkter. Är funktionen omvändbar? (6p)

Var god vänd!

4. Finn om möjligt de $k \in \mathbb{R}$ för vilka följande ekvationssystem har precis en lösning och bestäm lösningen; samt bestäm även de k för vilka ekvationssystemet har precis tre lösningar. Ekvationssystemet ges av: (6p)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & k \end{array}\right).$$

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x\to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 2} x^3$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående av en totalsumma om sex poäng; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   Funktionen f i a) till d) nedan är kontinuerlig och begränsad i intervallet $[0, \infty)$ samt uppfyller $f \neq 0$ för alla $x \in [0, \infty)$

   a) Funktionen f har ett största värde i $[0, \infty)$,
   b) Gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existerar (och är ändligt).
   c) Funktionen $1/f$ är begränsad i $[0, \infty)$,
   d) Funktionen f byter inte tecken i $[0, \infty)$.

7. a) Formulera Satsen om mellanliggande värde (den behöver ej bevisas), (2p)
   b) Formulera Medelvärdessatsen (den behöver ej bevisas), (2p)
   c) Antag $a < b$ och att f deriverbar på (a, b). Bevisa att f strängt växande på $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ på (a, b). (4p)

VA