Lösningar till Inledande matemtik för E1, (TMV157), 2016-10-27.

1. (a) i) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{7}}{\frac{1}{4}-\frac{5}{12}} = \dfrac{\frac{14+9}{21}}{\frac{3-5}{12}} = \dfrac{23}{21}\dfrac{12}{-2} = -6\dfrac{23}{21} = -2\dfrac{23}{7} = -\dfrac{46}{7}$, ii) Absolutbeloppet av ett reellt tal är alltid icke-negativt så alltså alltid större än eller lika med 0 så det kan inte vara mindre än eller lika med -1; dvs olikheten gäller inte för något $x \in \mathbb{R}$. iii) Likheten är uppfylld för alla reella tal x som har ett avstånd till 2 som är lika med 1; svaret är alltså $x = 1$ respektive $x = 3$.

   (b) i) $D(\dfrac{\cos x}{2+\sin x}) = \dfrac{-\sin x(2+\sin x) - \cos x \cos x}{(2+\cos x)^2} = -\dfrac{1+2\sin x}{(2+\sin x)^2}$, ii) $D(\sin(x+\sin(2x))) = \cos(x+\sin(2x))(1+(\cos(2x))2) = (1+2\cos(2x))\cos(x+\sin(2x))$

   (c) i) Sant enligt sats som vi bevisade i kursen. ii) ej sant; motexempel, t. ex. $f(x) = |x|$. iii) ej sant; motexempel, t. ex. funktionen $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

   (d) För $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + x$ har vi $f'(x) = 15x^4 + 15x^2 + 1 > 0$ så f är omvändbar. Derivation av $f(f^{-1}(x)) = x$ och insättning av $x = 0$ ger $(f^{-1})'(0) = 1/f'(f^{-1}(0)) = 1/f'(0) = 1/1 = 1$.

   (e) Låt $\alpha = \arctan(4/3)$ så att $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ och $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$ ger då att $3\sin\alpha = 4\cos\alpha$ som efter kvadrering och användande av trigonometriska ettan ger $9(1-\cos^2\alpha) = 16\cos^2 x$ så att $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Formeln för dubbla vinkeln för cos ger $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x)$ så att $\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$ och med $0 < \alpha = 2x < \frac{\pi}{2}$ får vi $\cos(\dfrac{1}{2}\arctan(4/3)) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+3/5}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

   (f) Vi har att f'' existerar på $[a,\infty)$, där $f''(a)$ definieras som högergränsvärdet av differenskvoten för $f'(x)$ i $x = a$; dvs $f''(a) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$ så att vi får $\lim\limits_{h\to 0^+}(f'(a+h)-f'(a)) = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f'(a+h)-f'(a)}{h}h =$
   $= \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f'(a+h)-f'(a)}{h}\lim\limits_{h\to 0^+} h = f''(a)\cdot 0 = 0$. Vi har alltså att $f'(x)$ är högerkontinuerlig i $x = a$ så att $f'(x)$ kontinuerlig på $[a,\infty)$. Låt $x \in (a,\infty)$. Vi tillämpar Medelvärdessatsen för f' på $[a,x]$ så att det $\exists\ \eta \in (a,x)$ för vilket gäller $\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a} = f''(\eta) \leq 0$ vilket ger att $f'(x) \leq f'(a) < 0$, $\forall x \geq a$. Alltså är f strikt avtagande på $[a,\infty)$ och kan därför ha högst ett nollställe i intervallet $[a,\infty)$.

   Pss kan vi tillämpa MVS för f på $[a,x]$ så att $\exists\ \xi \in [a,x]$ sådant att $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) \leq\leq f'(a) < 0$. Följdaktligen gäller $f(x) - f(a) \leq f'(a)(x-a) \Leftrightarrow f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a)$ och då $f'(a) < 0$ kommer alltså $f(x) < 0$ för stora x. Vidare har vi att $f(a) > 0$ och f kontinuerlig så satsen om mellanliggande värde ger att det $\exists\gamma > a$ sådant att $f(\gamma) = 0$. Alltså har vi att det finns precis ett nollställe till f i $[a,\infty)$.

2. (a) Låt $P_1 = (4,-1/2,0)$, $P_2 = (1/2,3/2,572)$ och $P_3 = (1,7/2,1)$. Vi får att $\overrightarrow{P_2P_1}= \dfrac{1}{2}(7,-4,-5)$ och $\overrightarrow{P_1P_3}= (-3,-4,1)$ och $n \equiv (7,-4,-5)\times(-3,-4,1) = 8(2,1,2)$ är en normalvektor till planet π som innehåller punkterna $\{P_1,\ P_2,\ P_3\}$ så att π har ekvationen $2x+y+2z = D$ och insättning av en punkt i planet, t ex P_1, ger $D = 15/2$ så att ekvationen för planet kan skrivas $4x+2y+4z = 15$.

   (b) Planet π_1 parallellt med π och innehållande $P_0 = (1,2,4)$ ligger på avståndet $d = \dfrac{|4\cdot 1+2\cdot 2+4\cdot 4-15|}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}} = \dfrac{|9|}{\sqrt{36}} = \dfrac{3}{2}$.

   (c) Planet π_1 har ekvation $4x+2y+4z = D$ där $D = 4\cdot 1+2\cdot 2+4\cdot 4 = 24$; dvs $\pi_1:\ 4x+2y+4z = 24$.
   Punkten Q på linjen $\ell : (x,y,z) = P_0 + t(2,1,2)$, $t \in \mathbb{R}$, som är närmast P_0 och ligger i planet π uppfyller alltså $4(1+2t)+2(2+t)+4(4+2t) = 15 \ \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$ så Q ges av $(x,y,z) = P_0 - \dfrac{1}{2}(2,1,2) = (0,3/2,3)$. (Koll: Q ligger i planet π ... .)
   Punkten $\tilde{P}$ som ligger längs linjen ℓ, på andra sidan π, med samma avstånd till π som avståndet mellan P_0 och π (som alltså är 3/2) har koordinaterna $\tilde{P} =\overrightarrow{O\tilde{P}}=\overrightarrow{OP_0} +2\ \overrightarrow{P_0Q}= (1,2,4)+2(-1,-1/2,-1) = (-1,1,2)$.
   Planet π_2 som är parrallellt med π och innehåller $\tilde{P}$ har alltså ekvation $4x+2y+4z = D$ där D ges av $D = 4\cdot(-1)+2\cdot 1+4\cdot 2 = 6$ så att sökta planet π_2 har ekvation $4x+2y+4z = 6$. (Koll att $\tilde{P}$ har avstånd $\tilde{d} = 3/2$ till π: $\tilde{d} = \dfrac{|4\cdot(-1)+2\cdot 1+4\cdot 2-15|}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}} = \dfrac{|-9|}{\sqrt{36}} = \dfrac{3}{2} = d$, så ok.)

3. Se lösningen till uppgift 3 på Dugga 3 som sändes ut på ping-pong tidigare under kursen.

4. Vi gör elementära radoperationer på det givna ekvationssystemets matrisformulering: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2 \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{array} \overset{RE}{\sim}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} -1 & -2 \\ & \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Härav följer via rad 3 att ekvatiojssystemet saknar lösning om $k = 3$. Om $k \neq 3$ så finns det pivotelement i kolonn $1, 3, 4$ och 5, så variabeln motsvarande kolonn 2 är fri; och då inget pivotelement i HL så finns alltså oändligt många lösningar och det finns alltså inget $k \in \mathbb{R}$ för vilket ekvationssystemet har precis en lösning; det är alltid oändligt många lösningar eller ingen lösning.

För HL$=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ger även $k = 3$ (som då gör tredje raden till en nollrad; dvs en ekvation som alltid är uppfylld) oändligt många lösningar (en två-parametrig lösningsmängd).

5. **a)** Antag att f är definierad för $I \setminus \{a\}$ där I är ett intervall runt a. Då gäller att

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

b) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och tag $\delta = \min[1, \varepsilon/19]$ och antag $0 < |x-2| < \delta$. Vi vill uppskatta $|f(x)-L| = |x^3-8| = |(x-2)(x^2+2x+4)| = |x-2||x^2+2x+4|$. Om nu $|x-2| < \delta$ så gäller alltså $|x-2| < \delta \leq 1$ som ger att $1 < x < 3 \Rightarrow 0 < x^2+2x+4 < 19$. Alltså gäller för givet $\varepsilon > 0$ att vi kan ta $\delta = \min[1, \varepsilon/19]$ och då gäller med detta val av δ att om $|x - 2| < \delta$ så har vi att $|x^3 - 2| = |x^2 + 2x + 4||x - 2| < 19|x - 2| < 19\delta \leq 19(\varepsilon/19) = \varepsilon$; d v s definitionen av att $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$ är uppfylld.

6. (a) Låt $\alpha = \arcsin(\frac{1}{3}) \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ och då $\sin\alpha > 0$ så gäller den förbättrade uppskattningen $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Då gäller $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1/3}{\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

   Svar: Sant.

   (b) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}} = \sqrt{1+\sqrt{0+0}} = 1$

   Svar: Sant.

   (c) Låt $p(x) = 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5$ vilket ger $p'(x) = 48x^3 - 42x^2 - 6x = 6x(x-1)(8x+1)$. Genom en teckenstudietabell för p' ser vi att p är strikt avtagande på $(-\infty, -\frac{1}{8})$, $\max_{[}-1/8, 1](p) = p(0) = -5$ så att $p(x) < 0$ på $[-1/8, 1]$ och strängt växande på $(1, \infty)$. Då det dessutom gäller $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \infty$ och $p(x)$ kontinuerlig på $\mathbb{R}$ så ger satsen om mellanliggande värde att det finns precis två nollställen, rötter, till $p(x)$ på $\mathbb{R}$.

   Svar: Sant.

7. Se kursboken.