MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2016-10-27, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Valentina Fermanelli, tel ankn 5325, 031-7725325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2016 inkluderas.) Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1516/

OBS: Även för uppgift 1) skall nu (kortare, motiverande) svar inlämnas.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in kortfattade svar**. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) i. Förenkla $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{7}}{\frac{1}{4}-\frac{5}{12}}$ så långt som möjligt, (2p)

   ii. Lös om möjligt $|x-2| \le -1$,

   iii. Lös om möjligt $|x-2| = 1$.

   b) Derivera följande funktioner: (2p)

   i) $\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$, *ii)* $\sin(x+\sin(2x))$.

   c) Vilka av följande påståenden gäller: (2p)

   i. om f deriverbar på (a,b) så är f kontinuerlig på (a,b),

   ii. om f kontinuerlig på (a,b) så är f deriverbar på (a,b),

   iii. om f deriverbar på (a,b) så är f' kontinuerlig på (a,b)?

   d) Visa att $f(x) = 3x^5+5x^3+x$ är inverterbar och beräkna $(f^{-1})'(0)$. (2p)

   e) Bestäm exakt: $\cos(\frac{1}{2}\arctan\frac{4}{3})$. (2p)

   f) Funktionen $f(x)$ är två gånger deriverbar i intervallet $[a,\infty)$ och uppfyller $f(a)>0$, $f'(a)<0$, $f''(x)\le 0$ för alla $x\in[a,\infty)$. Visa att f har exakt ett nollställe i intervallet (a,∞). (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar med motiveringar.

2. i) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $(4,-1/2,0)$, $(1/2,3/2,5/2)$ och $(1,7/2,1)$. (2p)

   ii) Bestäm avståndet mellan $(1,2,4)$ och planet i *i)*. (2p)

   iii) Bestäm ekvationen för de plan som ligger på ett lika stort avstånd som punkten $(1,2,4)$, från planet i *i)*. (3p)

3. Skissa grafen till funktionen $f(x)=\frac{3x^2}{x^2+x-2}$. Ange definitionsmängd D_f, värdemängd V_f och alla eventuella lokala extrempunkter, singulära punkter och asymptoter. Redogör för var funktionen växer respektive avtar. Konvexitet/konkavitet behöver ej utredas. Är funktionen omvändbar? (6p)

Var god vänd!

---

4. Låt $k \in \mathbb{R}$ och betrakta ekvationssystemet $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 9 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. (2+2+2p)

   a) Finns det k så att ekvationssystemet har precis en unik lösning?

   b) Hur många lösningar har ekvationssystemet för $k = 3$?

   c) Hur många lösningar har det homogena ekvationssystemet (med högerled 0) för olika k?

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x\to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 2} x^3$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående av en totalsumma om sex poäng; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   a) Det gäller att $\tan(\arcsin(\frac{1}{3})) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$,

   b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = 1$,

   c) Antalet reella rötter till $12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$ är precis två.

7. a) Formulera Satsen om mellanliggande värde (den behöver ej bevisas), (1p)

   b) Formulera Medelvärdessatsen (den behöver ej bevisas), (1p)

   c) Antag $a < b$ och att f är definierad på det öppna intervallet (a, b), och att f har ett extremvärde i en punkt $c \in (a, b)$. Visa att om $f'(c)$ existerar så är $f'(c) = 0$. (4p)

VA