1a) $z=-1+3i \quad w=2+2i$

$z-\bar{w} = -1+3i-(2-2i) = -3+5i$

$zw = (-1+3i)(2+2i) = -2-6-2i+6i = -8+4i \Rightarrow \mathrm{Re}(zw) = -8$

$|z+w| = |-1+3i+2+2i| = |1+5i| = (1^2+5^2)^{1/2} = \sqrt{26}$

b) i) $D\left(\frac{\cos x}{2+\sin x}\right) = \frac{-\sin x(2+\sin x)-\cos^2 x}{(2+\sin x)^2} = \frac{-1-2\sin x}{(2+\sin x)^2} = -\frac{1+2\sin x}{(2+\sin x)^2}$

ii) $D\big(\sin(x+\sin(2x))\big) = \cos(x+\sin(2x))\big(1+\cos(2x)\cdot 2\big)$

iii) $f'(x) = \big(1/\sin(e^x)\big)\cos(e^x)\,e^x \Rightarrow f'(\ln(\pi/3)) = \frac{1}{\sin(\pi/3)}\cos(\pi/3)\cdot\frac{\pi}{3} =$
$= \frac{\pi}{3}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

c) i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

iii) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+5e^{-x}}{2x^2+\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}e^{-x}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{\ln x}{x^2}\right)} = \frac{1-0+0}{2+0} = \frac{1}{2}$

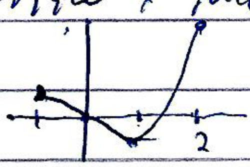
d) $\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 1\\ 2 & a & b\end{array}\right)\begin{array}{c}-2\\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 1\\ 0 & a+4 & b-2\end{array}\right)$ För $a=-4$, $b\neq 2$ finns inga lösn.

e) f kont. på $[-1/2, 2]$ så antar max (och min). Funktionen definierad på $\mathbb{R}$ och deriverbar överallt. Teckenschema:

$0 = f'(x) = 21x^6-21x^2 = 21x^2(x^4-1) = 21x^2(x^2+1)(x^2-1) \Rightarrow x = \pm 1, 0$

och bara 0 och 1 ligger i intervallet

Skiss av grafen



x	$-1/2$		0		1		2
f'		$-$	0	$-$	0	$+$	
f	$\frac{109}{128}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	328

∴ lokalt och globalt minimivärde -4 i $x=1$, lokalt max $\frac{109}{128}$ i $x=-1/2$ och lokalt max 328 i $x=2$.

f) Låt $g(x) = f(x)-x$ som är kont. på $[0,1]$ och $g(0)\geq 0$, $g(1)\leq 0$. Om $g(0)=0$ tag $x_0=0 \Leftrightarrow f(0)=0$, om $g(1)=0$ tag $x_0=1 \Leftrightarrow f(1)-1=0$. Om $g(0)>0$ och $g(1)<0$ så finns enligt satsen om mellanliggande värde ett $x_0\in(0,1)$ s.a. $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$ ■

2) i) Linjen bestäms av punkten $(2,-7,-6)$
och riktningsvektor $v=(2,1,-3)$ som då linjen
är ortogonal mot planet också är planets normalvektor
i.e. planets ekvation är $2x+y-3z=D$ och då $(-2,0,3)$
ska ligga i planet bestäms D av $D=2(-2)+0-3\cdot 3=-13$
så sökt planets ekv. är $2x+y-3z=-13$

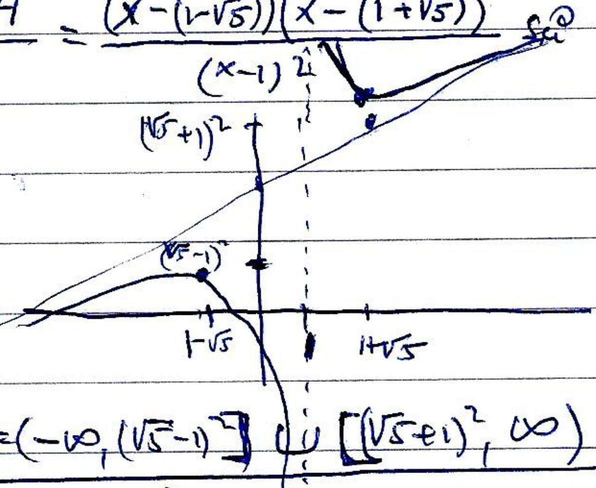
ii) Skärningspunkten mellan planet och linjen bestäms av
$-13=2(2t+2)+t-7-3(-3t-6) \Leftrightarrow -13=14t+15 \Leftrightarrow t=-2$
så skärningspunkten är $(-2,-9,0)$

---

3) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ och $x=1$ är en lodrät asymptot med $\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x)=\pm\infty$
Division ger $f(x)=x+5+\frac{5}{x-1}$ så $f(x)-(x+5)=\frac{5}{x-1}\to 0$
då $x\to\pm\infty$ så $y=x+5$ är sned asymptot i $\pm\infty$ Vidare
är $f'(x)=\frac{(2x+4)(x-1)-(x^2+4x)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-4}{(x-1)^2}=\frac{(x-(1-\sqrt5))(x-(1+\sqrt5))}{(x-1)^2}$ så

och

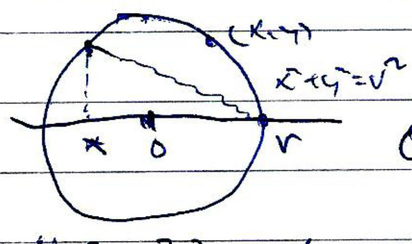
x		$1-\sqrt5$		1		$1+\sqrt5$	
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$(\sqrt5-1)^2$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$(\sqrt5+1)^2$	$\nearrow$



f är ej omvändbar $\quad V_f=(-\infty,(\sqrt5-1)^2]\cup[(\sqrt5+1)^2,\infty)$

---

4)



$-r\le x\le r \qquad A(x)=\frac{(r-x)\sqrt{r^2-x^2}}{2}$

$0=2A'(x)=-\sqrt{r^2-x^2}+(r-x)\frac12\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}(-2x)=$

$=-\left(\frac{(r^2-x^2)+x(r-x)}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)=-\frac{(r^2-2x^2+rx)}{\sqrt{r^2-x^2}} \quad \therefore\ r^2-2x^2+rx=0$

$\Leftrightarrow x^2-\frac12 rx-\frac12 r^2=0$

$\Leftrightarrow x=\frac r4\pm\sqrt{\frac{r^2}{16}+\frac12 r^2}=\begin{cases} r\\ -\frac12 r\end{cases}$

$\therefore\ x=-\frac12 r$ ger extremvärde till A som naturligtvis är ett maximum.

$\therefore$ Största arean är $A(-\frac12 r)=\frac{(r+\frac12 r)\sqrt{r^2-\frac14 r^2}}{2}$

$=\frac{\frac32 r\cdot r\sqrt{\frac34}}{2}=\frac{3\sqrt3}{8}r^2$

5 a) $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$ så att
$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

3/3

b) $\lim_{x\to 2} x^3 =$ (ty polynom kont.) $= (\lim_{x\to 2} x)^3 = 2^3 = 8$

Antag $0<|x-2|<\delta$ och $\varepsilon>0$ givet.

$|x^3-2^3| = |(x-2)(x^2+2x+2^2)| = |x-2||x^2+2x+4| < \delta|x^2+2x+4|$

Antag $\delta<1 \Rightarrow |x-2|<1 \Rightarrow 2-1<x<2+1 \Rightarrow |x^2+2x+4| \le$
$|x^2|+|2x|+|4| = x^2+2x+4 \le 9+6+4 = 19$ så $0<|x-2|<\delta<1 \Rightarrow$
$|x^3-2^3|<19\delta$ Välj nu $\delta = \min(1, \varepsilon/19) \Rightarrow$
$\delta\le 1$ uppfyllt och $0<|x-2|<\delta \Rightarrow |x^3-2^3|<$
$< 19\delta \le 19(\varepsilon/19) = \varepsilon$ så $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$ enl. def.

6) a) Vi ser att $D_f = \{x\in\mathbb{R}: \frac{1-x}{1+x}\ge 0\} =$ (eller teckenstudie) $= \{x\in\mathbb{R}: -1<x\le 1\}$

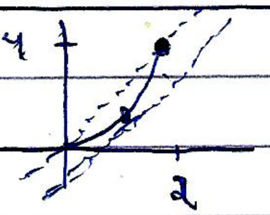
Vi ser vidare att $f(0) = 2\arctan 1 + \arcsin 0 = 2\cdot\frac{\pi}{4}+0 = \pi/2$ och
av frågans natur kan vi tro att påståendet är sant. Det
bevisas genom $f'(x) = \dots = 0$ och då D_f är ett intervall och
f deriverbar på $(-1,1)$ och kont. på $(-1,1]$ så har vi att
$f(x)=C$, konst på D_f och då får $C = f(0) = \pi/2$ stämmer alltså påståendet.

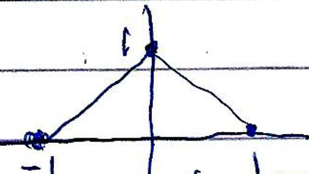
b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}} = 1$

så påståendet ej sant.

c) Genom insättning i relationen ser vi att $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ ligger
på den kurva som bestäms av relationen. Implicit derivering
ger $2\sin x\cos x + 2\cos y(-\sin y)y' - 2\cos x + 2\sin y\, y' = 0 \Rightarrow$
$2\sin y(1-\cos y)y' = 2\cos x(1-\sin x) \Rightarrow y'(\frac{\pi}{6}) = 2\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\frac{1}{2})/2\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\frac{1}{2}) = 1$
Antag att (x,y) är en pkt på tangenten. Teckna tangentens riktningskoeff
på två sätt ger: $1 = y'(\pi/6) = k = (y-\pi/3)/(x-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow y = x+\frac{\pi}{6}$ så sant.

så S, F, S

7) a) 

b) Låt t.ex. $h(x) = 1-|x|$ med
graf på intervallet $[-1,1]$ 

Medelkvoten $\frac{h(1)-h(-1)}{1-(-1)} = 0$ men den enda icke
linjen genom en pkt på kurvan är kurvan
genom toppen då h ej deriverbar (eller så linjen tangerar med $k=\pm 1$)