MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2016-12-21, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Robert Forslund, tel ankn 5325, 031-7725325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2016 inkluderas.) Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1617/

OBS: Även för uppgift 1) skall nu (kortare, motiverande) svar inlämnas.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in kortfattade svar**. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) Låt $z = -1 + 3i$, $w = 2 + 2i$. Beräkna $z - \overline{w}$, $\text{Re}(zw)$ och $|z + w|$. (2p)

   b) Derivera följande funktioner: *i)* $\dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$, *ii)* $\sin(x + \sin(2x))$; (3p)
   iii) Beräkna för $f(x) = \ln(\sin(e^x))$, derivatan $f'(\ln(\pi/3))$.

   c) Beräkna om möjligt följande gränsvärden: *i)* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$, (3p)
   ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x \cos x}$, *iii)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x + 5e^{-x}}{2x^2 + \ln x}$.

   d) Låt $a,\ b \in \mathbb{R}$ och betrakta ekvationssystemet $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right)$. För vilka värden på a och b saknar ekvationssystemet lösning? (2p)

   e) Funktionen $f(x) = 3x^7 - 7x^3$ antar maximum på det slutna intervallet $[-1/2, 2]$; varför? Bestäm lokala och globala extrempunkter och extremvärden. (2p)

   f) Antag att f är kontinuerlig på slutna intervallet $[0, 1]$ och där uppfyller $0 \le f(x) \le 1$. Visa att det existerar $x_0 \in [0, 1]$ sådant att $f(x_0) = x_0$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar med motiveringar.

2. i) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkten $(-2, 0, 3)$ och som är vinkelrätt mot linjen $x = 2t + 2,\ y = t - 7,\ z = -3t - 6$. (3p)

   ii) Bestäm skärningspunkten mellan linjen och planet i i). (3p)

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2+4x}{x-1}$. Ange definitionsmängd D_f, värdemängd V_f och alla eventuella lokala extrempunkter, singulära punkter och asymptoter. Redogör för var funktionen växer respektive avtar. Konvexitet/konkavitet behöver ej utredas. Är funktionen omvändbar? (6p)

Var god vänd!

4. I en cirkel med radie r placeras en rätvinklig triangel så att triangelns ena katet ligger längs en diameter i cirkeln och triangelns hypotenusa ligger längs en korda i cirkeln. Rita en figur som visar cirkeln och triangeln samt bestäm triangelns största möjliga area. Korda är i detta sammanhang det räta linjestycke som sammanbinder två punkter på en cirkelbåge. (6p)

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 2} x^3$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (3p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående av en totalsumma om sex poäng; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   a) Värdemängden för funktionen $y = f(x) = 2\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \arcsin x$ är endast $\{y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{\pi}{2}\}$.

   b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = 2$,

   c) Funktionen $y = y(x)$ är bestämd av $\sin^2 x + \cos^2 y - 2\sin x - 2\cos y + \dfrac{3}{2} = 0$. Tangentens ekvation i punkten $(\pi/6, \pi/3)$ på funktionskurvan är $y = x + \dfrac{\pi}{6}$.

7. a) Formulera medelvärdessatsen. Förklara utförligt och rita en figur som visar vad satsen säger om funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $[0, 2]$. (3p)

   b) Förklara utförligt och rita figurer som visar varför medelvärdesatsen ej måste vara uppfylld för en funktion f som är definierad på ett slutet, begränsat intervall $[a, b]$ och som är kontinuerlig på $[a, b]$, men inte deriverbar på hela (a, b). (3p)

VA