EME 1c), 3, (7, 9)

Övning 1 – torsdag LV1 (1/9-2016)

Lösning av tredjegradare genom gissande av rot

RA P.6 Ex 5(a)

$x^3 - x^2 - 4x + 4$

Gissning av rot: $x = 1$, Test: $1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 1 - 1 - 4 + 4 = 0$ OK!

$\overset{\text{Faktorsats}}{\Longrightarrow}$ $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)\,Q(x)$

För att få $Q(x)$: $\dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x-1} = x^2 - 4$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4 \\
\hline
x - 1 & x^3 - x^2 - 4x + 4 \\
 & -(x^3 - x^2) \\
\hline
 & -4x + 4 \\
 & -(-4x + 4) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4)$

Konjugatregeln: $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

$\Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x+2)(x-2)$

Rötter: $1, -2, 2$

Ytterligare exempel

$x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

Gissning av rot: $x = 1$, Test: $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 8 = 1 - 5 + 2 + 8 = 6$

$x = 2$ Test: $2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 8 = 8 - 20 + 4 + 8 = 0$

$\overset{\text{Faktorsats}}{\Longrightarrow}$ $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x-2)\,Q(x)$

$Q(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x-2} = x^2 - 3x - 4$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3x - 4 \\
\hline
x - 2 & x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \\
 & -(x^3 - 2x^2) \\
\hline
 & -3x^2 + 2x + 8 \\
 & -(-3x^2 + 6x) \\
\hline
 & -4x + 8 \\
 & -(-4x + 8) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x-2)(x^2 - 3x - 4) = (x-2)(x+1)(x-4)$

Rötter: $-1, 2, 4$

Lösning av olikhet med teckentabell

RA P.1 19

$\frac{1}{2-x} < 3$

$\frac{1-3(2-x)}{2-x} < 0 \iff \frac{3x-5}{2-x} < 0$

Bråket är odefinierat vid $x=2$ och 0 vid $x=\frac{5}{3}$

x		$\frac{5}{3}$		2	
$3x-5$	−	0	+	+	+
$2-x$	+	+	+	0	−
$\frac{3x-5}{2-x}$	−	0	+	odef	−

Lösningen är $(-\infty, \frac{5}{3}) \cup (2, \infty)$

RA P.1 26

$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$

$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} < 0 \iff \frac{3(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} < 0 \iff \frac{x+5}{(x-1)(x+1)} < 0$

Bråket är odefinierat vid $x=\pm 1$ och 0 vid $= -5$

x		-5		-1		1	
$x+5$	−	0	+	+	+	+	+
$x+1$	−	−	−	0	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	−	0	+
$\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$	−	0	+	odef	−	odef	+

Lösningen ges av $(-\infty, -5) \cup (-1, 1)$

EME 1c)

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 10x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 3 \\ 10 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{-2}{\leftarrow} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$5x + y = 3$

Fri variabel: $x = t \Rightarrow y = 3 - 5t$

EME 3

Lös $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ 4 \quad -3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

EME 7

Lös för $h, k \in \mathbb{R}$ ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 3 & h & k \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 3 & h & k \end{array}\right) \overset{-3}{\leftarrow} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & h-9 & k-6 \end{array}\right)$$

- Om $h=9, k=6$: $(1 \quad 3 \mid 2) \Rightarrow$ oändligt många lösningar
- Om $h=9, k\neq 6$: sista raden: $0 = k-6 \Rightarrow$ ingen lösning
- Om $h \neq 9$ $\forall k$: unik lösning $\left(x_2 = \frac{k-6}{h-9}, \; x_1 = 2 - 3x_2\right)$

EME 9

Finn en ekvation för a, b, c så att det går att lösa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ -2 & 5 & -9 & c \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ -2 & 5 & -9 & c \end{array}\right) 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ 0 & -3 & 5 & 2a+c \end{array}\right) 1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b+c \end{array}\right)$$

Sista raden: $\underline{0 = 2a + b + c}$

krav för att kunna lösa ekvationssystemet