MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2017-08-23, kl 8.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Sebastian Jobjörnsson, tel ankn 5325, 031-7725325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2016 inkluderas.) Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1617/

OBS: Även för uppgift 1) skall nu (kortare, motiverande) svar inlämnas.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in kortfattade svar**. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) *i)* Förenkla så långt som möjligt $\dfrac{\frac{3}{3}-\frac{3/2}{5}}{\frac{-1/3}{5}+\frac{2}{3}}$, (2p)
   ii) Finn om möjligt $x \in \mathbb{R}$ sådana att $|x-2| = 1$ och $|x+1| \leq 2$,
   iii) Finn om möjligt de x sådana att $x^2 - 3 < 2x - 4$.

   b) Låt $z_1 = 1 + i$ och $z_2 = \overline{z_1}$. Beräkna $|z_1|$, $|z_2|$, $z_1 z_2$, $|z_1 + z_2|$ och $\operatorname{Im}(z_1 z_2)$. (2p)

   c) Derivera följande funktioner: *i)* $\sin(2x)$, *ii)* $\tan x$; *iii)* $\sin(x + \ln x)$. (2p)

   d) Lös för $x \in \mathbb{R}$ följande: *i)* $\sin(2x) = \dfrac{1}{2}$, *ii)* $\cos 3x = \sin x$; *iii)* $|x-1| > |x-2|$. (3p)

   e) Beräkna om möjligt följande gränsvärden: *i)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$, *ii)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x \cos x}$, *iii)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+5e^{-x}}{2x^2+\ln x}$. (3p)

   f) Finns det något $k \in \mathbb{R}$ och så att ekvationssystemet $\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5k & 3 \end{array}\right)$ har åtminstone en lösning? Vilket/vilka är i så fall detta/dessa k? (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar med motiveringar.

2. Låt π vara planet $x + y + 2z = 0$. i) Finn en normal till planet π. ii) Bestäm ortogonala projektionen av punkten $(1, 1, 2)$ på planet π. iii) Vad är avståndet mellan punkten $(1, 1, 2)$ och planet π? (6p)

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$. Ange speciellt funktionens definitionsmängd och värdemängd, eventuella lokala extrempunkter, singulära punkter och asymptoter. Redogör för var funktionen växer respektive avtar. Konvexitet/konkavitet behöver ej utredas. Är funktionen omvändbar? (6p)

Var god vänd!

4. En person vill ta sig över en rak flod med bredden 3 km och vill nå en punkt på andra sidan 8 km nedströms. Personen ror med hastigheten 6 km/h och springer med hastigheten 8 km/h. Var på andra sidan floden ska personen gå iland för att nå det önskade målet så snabbt som möjligt? (6p)

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x\to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 2} x^3$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (3p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående av en totalsumma om sex poäng; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   a) $\cos(\frac{1}{2}\arctan(4/3)) = \frac{\pi}{2}$,

   b) för $f(x) = e^{3x^3+x+1}$ gäller $(f^{-1})'(e) = e^2$,

   c) funktionen $f(x) = 3x^7 - 7x^3$ har ett maximum på intervallet $[-\frac{1}{2}, 2]$ och detta maximumvärde är 1.

7. a) Formulera Satsen om mellanliggande värde (den behöver ej bevisas), (1p)

   b) Formulera Medelvärdessatsen (den behöver ej bevisas), (1p)

   c) Antag $a < b$ och att f är definierad på det öppna intervallet (a, b), och att f har ett extremvärde i en punkt $c \in (a, b)$. Visa att om $f'(c)$ existerar så är $f'(c) = 0$. (4p)

VA