Lösningar till Inledande matemtik för E1, (TMV157), 2017-10-26.

1. (a) a) $-2x > 4 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}4 = -2$, b) $\bar{z} = x - iy$, c) $z(2-3i) = 2x + 3y + i(-3x + 2y)$.

   (b) a) $D(\dfrac{\cos x}{2+\sin 3x}) = \dfrac{-\sin x(2+\sin 3x) - (\cos x)3\cos 3x}{(2+\sin 3x)^2}$, b) $D(x \arcsin(\dfrac{1}{x})) = \arcsin(\dfrac{1}{x}) + xD(\arcsin\dfrac{1}{x}) = \arcsin(\dfrac{1}{x}) + x(\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}(-\dfrac{1}{x^2}))$.

   (c) a) Se kurslitteraturen. ii) t ex funktionen $f(x) = |x|$ på intervallet $[-1,1]$ uppfyller inte $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = f'(\xi)$ för någon punkt $\xi \in [-1,1]$ eftersom kvoten är lika med 0 men $f'(\xi) = \pm 1$ för $x \neq 0$ och för $x = 0$ existerar ej derivatan.

   (d) För $f(x) = x^3 + e^{x-1}$ har vi $f'(x) = 3x^2 + e^{x-1} > 0$ så f är strängt växande och alltså omvändbar. Vi har $(f^{-1})'(f(x))) = 1/f'(x)$ och insättning av $x = 1$ ger $(f^{-1})'(2) = 1/f'(1) = 1/4$.

   (e) $Proj_u(v) = \dfrac{v\cdot u}{|u|}\dfrac{u}{|u|} = \dfrac{3}{7}(1,2,3)$.

   (f) i) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{5x+1}-4} =$‘$\dfrac{0}{0}$’$=(\ell\text{'Hôpital})= \lim_{x\to 3}\dfrac{1}{5/2\sqrt{5x+1}} = \dfrac{8}{5}$, ii) $\lim_{x\to\infty} \ln(\dfrac{4x^2+2x}{x^2}) = (\text{ty ln kont.}) = \ln(\lim_{x\to\infty}(\dfrac{4+2/x}{1})) = \ln(4+0) = 2\ln 2$.

   (g) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & a+2 \end{array}\right) \begin{array}{cc} -a & -1 \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & -1 \\ 0 & -(1+a) & 0 & a+1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} & \\ \hookleftarrow & \downarrow \\ -1 & \uparrow \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 & -(a+1) \\ 0 & 0 & 1-a & -a^2 \end{array}\right).$$

   För $a = 1$: ingen lösning, $a = -1$: oändligt många lösningar, $a \neq \pm 1$: unik lösning.

   För $a = -1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ där $s \in \mathbb{R}$.

   (h) Vi har $f'(x) = 3x^2 + 2px = 0 \;\Rightarrow\; x = 0,\ -(2/3)p$ där om $p < 0$ eller $p > 0$ vi har att f' är negativ mellan nollställena och positiv annars. Alltså är f ej inverterbar, omvändbar, om $p \neq 0$. Om $p = 0$ så är $f'(x) = 3x^2 > 0,\ x \neq 0$ vilket ger att f är strängt växande och därmed omvändbar.

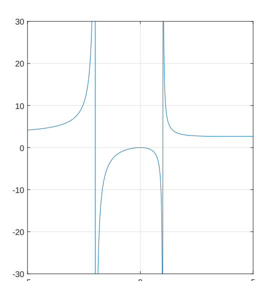
2. (a) En normal är $n = (2,3,4)$.

   (b) Låt $P_1 = (-1,1,0)$, $P_2 = (0,-1,1)$, $P_3 = (1,1,-1)$. Då är $\vec{P_1P_2} = (1,-2,1)$, $\vec{P_1P_3} = (2,0,-1)$ och $n = \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = (2,-(-3),4)$ så sökt plans ekvation är $2x + 3y + 4z = D$ där $D = 20$ ger ett plan som innehåller punkten $(1,2,3)$.

   (c) Låt punkten P vara på linjen $\ell : (x,y,z) = (t, -1+3t, t),\ t \in \mathbb{R}$. Då är $\vec{P_0P} = (t-1, -2+3t, t-1)$ och punkten P är som närmast P_0 om denna vektor är ortogonal mot linjens riktningsvektor; dvs $t - 1 + 3(-2+3t) + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 8/11$. Sök punkt är alltså $\frac{1}{11}(8,13,8)$.

3. Vi har $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+x-2} = \dfrac{3x^2}{(x-1)(x+2)}$ så $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$. Vi ser vidare att $\lim_{x\to -2^\pm} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty$ är vertkala asymptoter. Sned asymptot är den horisontella asymptoten $y = 3$ i både $\pm\infty$ ty $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2}{x^2(1-\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{(1-\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})} = 3$. Derivation och teckenstudie för derivatan ger $f'(x) = \dfrac{6x(x^2+x-2) - 3x^2(2x+1)}{(x-1)^2(x+2)^2} = \dfrac{3x(x-4)}{(x-1)^2(x+2)^2}$

x	$-\infty$		-2		0		1		4		∞
$f'(x)$		$+$	ξ	$+$	0	-	ξ	-	0	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	ξ	$\nearrow$	0	$\searrow$	ξ	$\searrow$	$8/3$	$\nearrow$	3



Graf uppg. 3

Vi ser vidare att $V_f = (-\infty, 0] \cup [8/3, \infty)$, och att $x = 0$ är en lokal maximipunkt, $x = 4$ lokal minimipunkt. Vidare saknar funktionen globalt maximum och globalt minimum och funktionen är inte omvändbar.

4. **a)** Antag att f är definierad för $I \setminus \{a\}$ där I är ett intervall runt a. Då gäller att

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

b) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet, fixt men godtyckligt > 0 och tag $\delta = \min[1, \varepsilon/5]$. Antag $0 < |x-2| < \delta$. Vi vill visa att då gäller $|f(x)-L| < \varepsilon$. Vi uppskattar $|f(x)-L| = |x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| < \delta|x+2|$. Om nu $|x-2| < \delta = \min[1, \varepsilon/3] \le 1$ så gäller alltså att $1 < x < 3 \Rightarrow 0 < x+2 < 5$. Alltså gäller för givet $\varepsilon > 0$ att vi kan ta $\delta = \min[1, \varepsilon/5]$ och då gäller med detta val av δ att om $|x-2| < \delta$ så har vi att $|x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2| < 5\delta \le 5(\varepsilon/5) = \varepsilon$; d v s för ett godtyckligt $\varepsilon > 0$ har vi visat ett det finns ett $\delta > 0$ (nämligen $\delta = \min[1, \varepsilon/5]$) sådant att om $0 < |x-2| < \delta$ så gäller $|f(x)-L| < \varepsilon$. Detta betyder ju enligt definitionen i a) att $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

5. Vi noterar att kurvan inte passerar origo eller mer generellt, ngn av koordinataxlarna, för där kan relationen $x^2y^4 = 1$ inte gälla. Implicit derivering ger $0 = \dfrac{d}{dx}(1) = \dfrac{d}{dx}(x^2y^4) = 2xy^4 + x^2 4y^3 y' = 2xy^3(y+2xy')$ som medför $y' = -y/2x$. Låt (x, y) vara en punkt på kurvan. Pythagoras ger att avståndet d från origo till punkten (x, y) på kurvan uppfyller $d^2 = x^2 + y^2$. Eftersom (x, y) är en minimipunkt på kurvan för avståndet så är linjen genom origo och (x, y) parallell med en normal till kurvan och därför ortogonal mot tangenten. Riktningskoefficienten för normalen som går genom origo och (x, y) är ju $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y-o}{x-0} = \frac{y}{x}$ och då tangentens riktningskoefficient är $y' = -y/2x$ ger detta kombinerat med att relationen mellan tangentens och normalens riktningskoefficienter är att deras produkt är -1 så får vi en relation mellan x och y som insatt i kurvans relation $x^2y^4 = 1$ ger en ekvation för x som löst ger $x = 1/2^{1/3}$ och som därmed också ger y-koordinaten och därmed minsta avståndet.

Enklare är kanske att avståndet d för punkter på kurvan i själva verket är åtminstone lokalt en funktion av bara x och för avståndets minimipunkt bland punkterna på kurvan, är denna funktions derivata alltså noll. Detta ger alltså $0 = 2dd' = 2x + 2yy' = 2x - \dfrac{y^2}{x} \Rightarrow y^2 = 2x^2$ och detta insatt i kurvans relation $x^2y^4 = 1$ ger att $x = 1/2^{1/3}$ som ger för sökt minsta avstånd att $d^2 = x^2 + y^2 = \dfrac{3}{2^{2/3}}$ och alltså att $d = \dfrac{3^{1/2}}{2^{1/3}}$.

6. (a) En direkt tilllämpning av MVS ger att på intervallet $I = [x, x+1]$ så gäller $f(x+1) - f(x) = \dfrac{f(x+1)-f(x)}{1} = f'(\xi) \to 0$ då $x \to \infty$ ty $\xi = \xi(x) \in I$ så att $\xi \to \infty$ då $x \to \infty$ och då $f'(x) \to 0$ då $x \to \infty$ så gäller samma sak för $f'(\xi)$.
Svar: Sant.

(b) Om $f(x)$ har ett gränsvärde i ∞ så behöver ju inte derivatan gå mot noll i oändligheten om f närmar sig sitt gränsvärde tillräckligt mycket 'svängande'; tag t ex $f(x) = 2 + \frac{1}{x}\sin(x^2)$. Då gäller $f(x+1) - f(x) \to 2 - 2 = 0$ då $x \to \infty$ men $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\sin(x^2) + \dfrac{1}{x}(\cos(x^2))2x \not\to 0$ då $x \to \infty$.
Svar: Falskt.

(c) Antag $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Eftersom f är omvändbar gäller då $g(x_1) = g(x_2)$ och eftersom g också är omvändbar så gäller $x_1 = x_2$; alltså är $f \circ g$ omvändbar. Inversen till $f \circ g$ är $g^{-1} \circ f^{-1}$ och inte $f^{-1} \circ g^{-1}$; ty $((f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}))(x) = (f \circ g)((g^{-1} \circ f^{-1})(x)) = (f \circ g)((g^{-1}(f^{-1}(x))) = f(g(g^{-1}(f^{-1}(x)))) = f(f^{-1}(x)) = x$ och det är inte svårt att visa att inversen är entydig om den existerar; eller alternativt visa genom ett konkret exempel. T ex $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \ln x$ ger i detta exempel att $y = f(g(x)) = \dfrac{1}{\ln x}$ så att $(f \circ g)^{-1}(y) = e^{1/y}$ men $f^{-1}(g^{-1}(y)) = e^{-y}$.
Svar: Falskt.

7. Se kursboken.