MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2017-10-26, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Jakob Hultgren, tel ankn 5325, 031-7725325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2017 inkluderas.) Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1718/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in kortfattade men motiverande svar**. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) Låt $x, y \in \mathbb{R}$ och $z = x + iy \in \mathbb{C}$. a) För vilka x gäller $-2x > 4$, b) Ange $\bar{z}$, c) Beräkna $z \cdot (2 - 3i)$. (1p)

   b) Derivera a) $\frac{\cos x}{2+\sin(3x)}$, b) $x \arcsin(\frac{1}{x})$. (1p)

   c) (a) Formulera medelvärdessatsen. Förklara utförligt och rita en figur som visar vad satsen säger om funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $[0, 2]$. (b) Förklara utförligt och rita figurer som visar varför medelvärdesatsen ej måste vara uppfylld för en funktion f som är definierad på ett slutet, begränsat intervall $[a, b]$ och som är kontinuerlig på $[a, b]$, men inte deriverbar på hela (a, b). (2p)

   d) Låt $f(x) = x^3 + e^{x-1}$. Visa att f är omvändbar och finn $(f^{-1})'(2)$. (2p)

   e) Låt $u = (1, 2, 3)$ och $v = (1, 1, 1)$. Bestäm $Proj_u(v)$, projektionen av v på u. (2p)

   f) Beräkna i) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{5x+1}-4}$ ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\ln(4x^2 + 2x) - 2\ln x)$ (2p)

   g) Låt $a \in \mathbb{R}$ och betrakta ekvationssystemet $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & a+2 \end{array}\right)$. (2p)
   Finn om möjligt lösningarna till ekvationssystemet i det/de fall då a ger ett oändligt antal lösningar till ekvationssystemet.

   h) För vilka reella tal p är $f(x) = x^3 + px^2 + 1$ inverterbar? (2p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar med motiveringar.

2. i) Bestäm normalen till planet $2x + 3y + 4z = 1$ i $\mathbb{R}^3$. (1p)

   ii) Bestäm ekvationen för det plan genom punkten $(1, 2, 3)$ som är parallellt med planet som innehåller punkterna $(-1, 1, 0)$, $(0, -1, 1)$ och $(1, 1, -1)$. (3p)

   iii) I kursens inlämningsuppgifter 2 och 3 gavs man en punkt $P_0 = (1, 1, 1)$ i $\mathbb{R}^3$ och en skärningslinje $(x, y, z) = (t, -1 + 3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, mellan två plan i $\mathbb{R}^3$ och ombads med två olika metoder finna den på linjen närmaste punkten till P_0. Denna uppgift går att enklare, än med de metoder anvisade i inlämningsuppgifterna, lösa med hjälp av ortogonalitet och skalärprodukt; gör det. **Ledning:** Använd linjens riktningsvektor och en vektor från P_0 till en punkt på linjen. (2p)

Var god vänd!

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+x-2}$. Ange definitionsmängd D_f, värdemängd V_f och alla eventuella lokala extrempunkter, singulära punkter och asymptoter. Redogör för var funktionen växer respektive avtar. Konvexitet/konkavitet behöver ej utredas. Är funktionen omvändbar? (6p)

4. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x\to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 2} x^2$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (4p)

5. Finn det kortaste avståndet från origo till en punkt på kurvan $x^2y^4 = 1$ i $\mathbb{R}^2$. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående av en totalsumma om sex poäng; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   a) Om $f'(x) \to 0$ då $x \to \infty$ så gäller att $f(x+1) - f(x) \to 0$ då $x \to \infty$,

   b) Om $f(x+1) - f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ så gäller att $f'(x) \to 0$ då $x \to \infty$,

   c) Om f^{-1} och g^{-1} existerar så är, om $(f \circ g)(x) \equiv f(g(x))$ existerar, denna funktion $f \circ g$ omvändbar och $(f \circ g)^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x))$

7. a) Formulera Satsen om mellanliggande värde (den behöver ej bevisas), (1p)

   b) Formulera Medelvärdessatsen (den behöver ej bevisas), (1p)

   c) Antag $a < b$ och att f är definierad på det öppna intervallet (a, b), och att f har ett extremvärde i en punkt $c \in (a, b)$. Visa att om $f'(c)$ existerar så är $f'(c) = 0$. (4p)

VA