MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2017-12-20, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt, Robert Forslund, tel ankn 5325, 031-7725325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2017 inkluderas.) Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående lösningar och granskning, se kursens hemsida: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1718/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in kortfattade men motiverande svar**. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) Låt $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 2 + i \in \mathbb{C}$. Finn $Re(z_1)$, $Im(z_2)$ och $|z_2 - z_1|$. (2p)

   b) Funktionen $f(x) = x^2$ med definitionsmängd $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, är omvändbar, dvs har en invers f^{-1}; bestäm denna invers f^{-1}. (2p)

   c) Lös olikheten $\dfrac{x-1}{x+3} < \dfrac{5}{x^2+6x+9}$. (3p)

   d) Derivera

      i. $f(x) = \dfrac{(2x+1)^3}{(x^2+1)^2}$ och lös $f'(x) = 0$, (2p)

      ii. $f(x) = x \arcsin(\ln(1+x^2))$. (2p)

   e) Funktionen $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ har en invers f^{-1}, bestäm denna; bestäm även $(f^{-1})'(3)$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar med motiveringar.

2. i) Bestäm i $\mathbb{R}^3$ ekvationen för xz-planet. (1p)

   ii) Bestäm i xz-planet ekvationen för tangenten, $z = T(x)$, till funktionen $z = z(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} - 1$ i punkten där $x = 3$. (2p)

   iii) Bestäm i $\mathbb{R}^3$ ekvationen för det plan som innehåller punkten $(1, 1, 1)$ samt två punkter i $\mathbb{R}^3$ på tangentlinjen i ii) (som alltså har koordinater $(x, 0, T(x))$; för två olika punkter x). (3p)

Var god vänd!

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{4-5x}{2-x} - 3x^{-2}$. Ange definitionsmängd D_f, värdemängd V_f och alla eventuella lokala extrempunkter, singulära punkter och asymptoter. Redogör för var funktionen växer respektive avtar. Konvexitet/konkavitet behöver ej utredas. Är funktionen omvändbar? (6p)

4. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 2} x^2$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (4p)

5. En sluten cylindrisk behållare med volymen $1m^3$ skall tillverkas. Bestäm höjd och radie för behållaren så att behållarens area blir minimal. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående av en totalsumma om sex poäng; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   a) Det finns inget $a \in \mathbb{R}$ sådant att ekvationssystemet $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & a+2 \end{array}\right)$, har precis en lösning,

   b) Om f'' existerar på ett intervall I och 0 och 2 tillhör intervallet samt att $f(0) = f(1) = 0$ och $f(2) = 1$, så finns $a \in I$ sådant att $f'(a) = \frac{1}{2}$,

   c) Det enda komplexa tal $z \in \mathbb{C}$, sådant att $iz < z + 1$, är $z = 0$.

7. a) Formulera Satsen om mellanliggande värde (den behöver ej bevisas), (1p)

   b) Formulera Medelvärdessatsen (den behöver ej bevisas), (1p)

   c) Antag $a < b$ och att f är definierad på det öppna intervallet (a, b), och att f har ett extremvärde i en punkt $c \in (a, b)$. Visa att om $f'(c)$ existerar så är $f'(c) = 0$. (4p)

VA