MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV157)
Tid: 2018-08-29, kl 8.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt, Kristian Holm, tel ankn 5325, 031-7725325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2017 inkluderas.) Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida: www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv157/1718/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in kortfattade men motiverande svar**. Glöm inte att det i vissa uppgifter är lätt att kontrollera svaret!

   a) Förenkla så långt som möjligt *i)* $\sqrt{(-2)^2}$, *ii)* $\sqrt{(+2)^2}$, och *iii)* $(\sqrt{2})^2$. (1p)

   b) Ange ett primtal större än 10, samt ett annat primtal större än 20. (1p)

   c) Låt $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 1 + i \in \mathbb{C}$. Finn $Im(z_1)$, $Re(z_2)$ och $z_1 z_2$. (2p)

   d) Lös $|x + 2| = 1$. (2p)

   e) Lös olikheten $\dfrac{x+1}{x-3} < x + 2$. (2p)

   f) Låt $a_{i,j},\ b_i \in \mathbb{R}$ och betrakta det inhomogena ekvationssystemet (3p)

   $$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & b_3 \end{array}\right)$$ med tre ekvationer och fyra obekanta.

   Hur många lösningar kan ekvationssystemet ha; och förklara varför?

   g) Visa att funktionen $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ har en invers f^{-1}, bestäm denna; bestäm även $(f^{-1})'(3)$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar med motiveringar.

2. i) Bestäm i $\mathbb{R}^3$ ekvationen för yz-planet. (2p)

   ii) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkten $(1, 1, 1)$ och som **ej** skär planet $x - y + 2z = 1$. (4p)

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+x-2}$. Ange definitionsmängd D_f, värdemängd V_f och alla eventuella lokala extrempunkter, singulära punkter och asymptoter. Redogör för var funktionen växer respektive avtar. Konvexitet/konkavitet behöver ej utredas. Är funktionen omvändbar? (6p)

Var god vänd!

4. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \to 2} x^2$ och bevisa sedan med den i a) just givna definitionen, att ditt beräknade gränsvärde är korrekt. (4p)

5. En sluten cylindrisk behållare med volymen $1m^3$ skall tillverkas. Bestäm höjd och radie för behållaren så att behållarens area blir minimal. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivera svaren. Högst två poäng per påstående av en totalsumma om sex poäng; att enbart ange 'sant' eller 'falskt' ger ingen poäng. (6p)

   a) Om $f'(x) \to 0$ då $x \to \infty$ så gäller att $f(x+1) - f(x) \to 0$ då $x \to \infty$,

   b) Om $f(x+1) - f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ så gäller att $f'(x) \to 0$ då $x \to \infty$,

   c) Om f^{-1} och g^{-1} existerar så är, om $(f \circ g)(x) \equiv f(g(x))$ existerar, denna funktion $f \circ g$ omvändbar och $(f \circ g)^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(x))$

7. a) Formulera Satsen om mellanliggande värde (den behöver ej bevisas), (1p)

   b) Formulera Medelvärdessatsen (den behöver ej bevisas), (1p)

   c) Antag $a < b$ och att f är definierad på det öppna intervallet (a, b), och att f har ett extremvärde i en punkt $c \in (a, b)$. Visa att om $f'(c)$ existerar så är $f'(c) = 0$. (4p)

VA