bild 1

# Linjär Algebra M/TD Läsvecka 2

**Omfattning och Innehåll**
**2.1** Matrisoperationer: addition av matriser, multiplikation av matris med skalär, multiplikation av matriser.
**2.2 - 2.3** Matrisinvers, karakterisering av inverterbara matriser.
**2.4** Blockmatriser
**2.5** LU-faktorisering.

bild 2
**Mål:**
Att behärska matrisoperationerna, (båda sätten att beräkna produkt).
Att veta vilka räknelagar som gäller och vilka som inte gäller.
Att kunna bevisa att $A(BC) = (AB)C$
Att kunna ge exempel som visar att vissa samband inte gäller.

bild 3
Att kunna beräkna matrisinverser.
Att kunna innehållet i sats 8 och kunna motivera de olika ekvivalenserna.
Att kunna räkna med blockmatriser
Att kunna utföra en enkel LU-faktorisering och kunna utnyttja den vid lösning av ekvationssystem.

bild 4
**Matriskonventioner**
Positionen i rad $r$ och kolonn $k$ kallas position $(r, k)$.
Elementen i en matris $A$ betecknas vanligtvis med $a$,
elementet på position $(r, k)$ betecknas $a_{rk}$ eller $A_{rk}$
Kolonnerna i $A$ betecknas $\boldsymbol{a}$ med index, eller $\text{kol}(A)$ med index.
Raderna i $A$ betecknas $\text{rad}(A)$ med index.

bild 5

En generell $4 \times 5$-matris $A$ kan skrivas på följande sätt:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} \mathrm{rad}_1(A) \\ \mathrm{rad}_2(A) \\ \mathrm{rad}_3(A) \\ \mathrm{rad}_4(A) \end{bmatrix}$$

$$\text{eller}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{kol}_1(A) & \mathrm{kol}_2(A) & \mathrm{kol}_3(A) & \mathrm{kol}_4(A) & \mathrm{kol}_5(A) \end{bmatrix}$$

$$\text{eller}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{bmatrix}$$

bild 6

**Matrisoperationer**

**Addition**

Matriser av samma typ kan adderas. Additionen sker genom att elementen på samma positioner adderas. ”Positionsvis addition”.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

bild 7

**Multiplikation med skalär**

Alla matriselementen multipliceras med skalären.

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \end{bmatrix}$$

**Kommentar**
Båda dessa matrisoperationer är "självklara" då vi tänker på att varje matris kan uppfattas som avbildningsmatris för en linjär avbildning.
Om $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ges av $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ och $S : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ges av $S(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ så ges summan av funktionerna, $T+S$, av $(T+S)(\boldsymbol{x}) = (A+B)\boldsymbol{x}$ och funktionen $cT$ av $cT(\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x}$

**Exempel.** Betrakta avbildningen $P$ som geometriskt innebär projektion av vektorn $\boldsymbol{x} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ på planet $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Eftersom planet går genom origo är detta en linjär avbildning.
Vi erhåller projektionen $P(\boldsymbol{x})$ genom att dela upp $\boldsymbol{x}$ i ortogonala komposanter $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_n} + \boldsymbol{x_n}^{\perp}$ där $\boldsymbol{x_n}$ är projektionen av $\boldsymbol{x}$ på planets normal $\boldsymbol{n}$. Vektorn $\boldsymbol{x_n}^{\perp}$ är ortogonal mot $\boldsymbol{n}$ och är den sökta projektionen. Denna beräknas alltså genom $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x_n}^{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_n}$.
Projektionen av $\boldsymbol{x}$ på $\boldsymbol{n}$ beräknas enklast med projektionsformeln:

$$\boldsymbol{x_n} = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n}$$

Planets normal ges av koefficienterna i ekvationen, $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Detta ger $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = 2x_1 - 2x_2 + x_3$ och $\|\boldsymbol{n}\|^2 = 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 9$.
Med beteckningen $P_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x_n}$ har vi alltså

$$P_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \frac{2x_1 - 2x_2 + x_3}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2(2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ -2(2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

På matrisform har vi

$$P_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

Här ser vi för övrigt också att denna projektion är en linjär avbildning, den ges ju av en matris.

*forts. kommentar*
Nu har vi att $P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_n}$.
Sätter vi $Id(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, identitetsavbildningen så ges denna av enhetsmatrisen,$I$.
Med dessa beteckningar har vi

$$P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_n} = Id(\boldsymbol{x}) - P_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = I\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = (I - A)\boldsymbol{x}$$

Avbildningsmatrisen för $P$ är alltså

$$I-A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$P(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

bild 8
**Multiplikation**
Om antalet kolonner i $A$ är samma som antalet rader i $B$ kan produkten $AB$ bildas.
Om $A$ är en $m \times n$ -matris
$B$ är en $n \times p$-matris, $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}$
så är $AB$ $m \times p$-matrisen
$A\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \cdots & \boldsymbol{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & A\boldsymbol{b}_3 & \cdots & A\boldsymbol{b}_p \end{bmatrix}$

**Kommentar**
Även matrismultiplikation kan förstås genom att vi tänker på avbildningsmatriser.
Om $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ges av $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ och $S : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ges av $S(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ så ges den sammansatta funktionen, $T \circ S$, av $(T \circ S)(\boldsymbol{x}) = T(S(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$
För att övertyga oss om detta skall vi kontrollera den sista likheten, $A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$. Det är den som avgör om vi har ”rätt” matrismultiplikation.

bild 9

**Skalärprodukt i $\mathbb{R}^n$**

Om $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ så är *skalärprodukten* av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

bild 10

**Rad-kolonn regeln för beräkning av matrisprodukt**

Elementet på position $(i,j)$ i produkten $AB$ är skalärprodukten av rad $i$ ur $A$ med kolonn $j$ ur $B$,

$$(AB)_{ij} = \mathrm{rad}_i(A)\cdot\mathrm{kol}_j(B)$$

**Kommentar**

Denna regel är praktisk vid ”huvudräkning”. Man beräknar ett element i taget i matrisprodukten, istället för en hel kolonn.

**Exempel**

Vi önskar beräkna produkten $AB$ då

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$C = AB$ är nu en $3 \times 3$-matris. Elementet $c_{11}$på position $(1,1)$, alltså rad 1 och kolonn 1, är skalärprodukten av rad 1 ur $A$ med kolonn 1 ur $B$. Vi får $c_{11} = 1\cdot(-1) + 1\cdot 9 + 1\cdot 7 + 1\cdot 4 = 19$. Elementet $c_{23}$ i rad 2, kolonn 3, är på samma sätt $2\cdot 5 + 1\cdot 3 + 12\cdot(-3) + 4\cdot 5 = -3$

bild 11

**Sats 2, räknelagar för matrisoperationer.** Antag att $A$, $B$ och $C$ är matriser sådana att nedanstående operationer är möjliga. Då gäller:

a $A(BC) = (AB)C$ (associativ lag för multiplikation)

b $A(B + C) = AB + AC$ (vänsterdistributiva lagen)

c $(B + C)A = BA + CA$ (högerdistributiva lagen)

d $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ för alla skalära $r$

e $I_m A = A = AI_m$ (Identitetselement för multiplikation)

bild 12

**VARNING!**

1. I allmänhet är $AB \neq BA$
2. Av $AB = AC$ kan man **inte** dra slutsatsen $B = C$.
3. Av $AB = 0$ kan man **inte** dra slutsatsen $A = 0$ eller $B = 0$

**Kommentar**

Man kan testa punkt 1. med nästan vilka kvadratiska matriser $A$ och $B$ som helst. Sannolikheten att de skulle uppfylla $AB = BA$ är mycket liten. Som övning kan du undersöka vilka matriser $X$ som uppfyller $AX = XA$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

För att inse att punkt 3. (och därmed också punkt 2.) är sann kan man tänka på att villkoret $AB = 0$ är samma som att raderna i $A$ är ortogonala mot kolonnerna i $B$ vilket ju är lätt att åstadkomma genom kloka val av rader i $A$ och kolonner i $B$.

bild 13

Med **transponatet** av en $m \times n$-matris $A$ menas $n \times m$-matrisen $A^T$ vars kolonnvektorer är radvektorerna i $A$:

$$\mathrm{kol}_i(A^T) = \mathrm{rad}_i(A)$$

bild 14

**Exempel**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 12 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

bild 15

**Exempel** Om $\boldsymbol{u}$ är en kolonnvektor, en $n \times 1$-matris, är $\boldsymbol{u}^T$ motsvarande radvektor.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

*skalärprodukten* av två kolonnvektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ kan nu skrivas som en matrisprodukt:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}$$

bild 16

**Sats 3** Låt $A$ och $B$ vara matriser sådana att nedanstående operationer är möjliga. Då gäller:

a. $(A^T)^T = A$

b. $(A + B)^T = A^T + B^T$

c. För alla skalära $r$ är $(rA)^T = rA^T$

d. $(AB)^T = B^T A^T$ **Notera ordningen!**

**Kommentar**

Punktera a., b. och c. är nog självklart sanna. Punkt .d kan verka överraskande men kolonn-rad regeln för beräkning av produkten förklarar det enkelt. På position $(i, j)$ i $(AB)^T$ hittar vi elementet som finns på position $(j, i)$ i AB. Detta är $\text{rad}_j(A) \cdot \text{kol}_i(B)$. Transponering ger av detta $\text{kol}_j(A^T) \cdot \text{rad}_i(B^T) = \text{rad}_i(B^T) \cdot \text{kol}_j(A^T)$ som ju är elementet på position $(i, j)$ i $B^T A^T$.

bild 17

En $n \times n$-matris $A$ kallas *inverterbar* om det finns en $n \times n$-matris $C$ sådan att

$$CA = I \text{ och } AC = I$$

där $I = I_n$ är enhetsmatrisen (identity matrix) av typ $n \times n$.
Matrisen $C$ är i så fall entydigt bestämd och kallas inversen till $A$. Inversen betecknas $A^{-1}$.

**Kommentar**

Endast kvadratiska matriser kan ha invers. Om du skriver upp en kvadratisk matris på måfå är det ganska troligt att den är inverterbar.

bild 18

**Notera att** om $A$ är **inverterbar** så gäller

2. Av $AB = AC$ kan man dra slutsatsen $B = C$.

3. Av $AB = 0$ kan man dra slutsatsen $B = 0$

**Kommentar**

Av $AB = AC$ följer att $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$. Men $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$ och $A^{-1}(AC) = C$. Alltså följer att $B = C$.
Observera att man inte kan dra samma slutsats av $AB = CA$. Multiplikation med $A^{-1}$ ger $A^{-1}(AB) = A^{-1}(CA)$ och som ovan $B = A^{-1}(CA)$. Högerledet är oftast inte samma som $C$.

bild 19

**Sats 4** Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
Om $ad - bc \neq 0$ är $A$ inverterbar med

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Om $ad - bc = 0$ är $A$ **inte** inverterbar.
Talet $ad - bc$ kallas **determinanten** till $A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

bild 20

**Exempel**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad \det A = -11, \quad A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = I_2$$

bild 21

**Sats 5** Om $A$ är en inverterbar $n \times n$-matris så gäller att
för varje $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^n$ har ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ entydig lösning $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$

**Kommentar**

Då $A$ är inverterbar har vi att $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$. Praktiskt att veta men inte så ofta vi utnyttjar det då vi löser ekvationer. Det kräver mer kalkyler att beräkna matrisinvers än att lösa ett ekvationssystem.

bild 22

**Sats 6**

a. Om $A$ är en inverterbar matris så är $A^{-1}$ inverterbar och

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

b. Om $A$ och $B$ är inverterbara $n \times n$-matriser så är $AB$ inverterbar och

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \textbf{notera ordningen}$$

c. Om $A$ är en inverterbar matris så är $A^T$ inverterbar och

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

**Kommentar**

Punkt b. få en förklaring längre fram då vi tittar på inversen till en linjär avbildning.

bild 23

Med en **elementär matris** menas en matris $E$ som ”utför *en* elementär radoperation”.
Alltså om $A \sim A_1$ via en enda elementär radoperation och $EA = A_1$ så kallas $E$ elementär.

bild 24

**Det finns tre typer av elementära matriser**

Typ 1 som motsvarar att till en rad addera en multipel av en annan rad.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Om $A = \begin{bmatrix} \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_2(A) \\ \text{rad}_3(A) \end{bmatrix}$ så är $E_1 A = \begin{bmatrix} \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_2(A) \\ \text{rad}_3(A) - 4\text{rad}_1(A) \end{bmatrix}$

bild 25

Typ 2 som motsvarar att två rader byter plats.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Om $A = \begin{bmatrix} \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_2(A) \\ \text{rad}_3(A) \end{bmatrix}$ så är $E_2 A = \begin{bmatrix} \text{rad}_2(A) \\ \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_3(A) \end{bmatrix}$

bild 26

Typ 3 som motsvarar att en rad multipliceras med en skalär $\neq 0$ .

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Om $A = \begin{bmatrix} \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_2(A) \\ \text{rad}_3(A) \end{bmatrix}$ så är $E_3 A = \begin{bmatrix} \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_2(A) \\ 5\text{rad}_3(A) \end{bmatrix}$

bild 27

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

bild 28

**Sats 7**

En $n \times n$-matris $A$ är inverterbar om och endast om $A$ är radekvivalent med $I_n$.

I så fall kommer varje följd av radoperationer som överför $A$ till $I_n$ också att överföra $I_n$ till $A^{-1}$.

bild 29

**Metod för beräkning av $A^{-1}$**

Överför matrisen $\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$ till reducerad trappstegsform.

Om denna är $\left[\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right]$ så är $B = A^{-1}$.

Om man inte får ett pivotelement i samtliga kolonner i $A$ så är $A$ inte inverterbar.

**Kommentar**

Det finns två sätt att motivera metoden. dels med sats 7, dels genom ett ekvationsresonemang.

Då vi söker $A^{-1}$ söker vi en kvadratisk matris $X$ som uppfyller $AX = I$. Om kolonnerna i $X$ är $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ skall alltså gälla att $A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i$ för $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$. Vi kan lösa dessa ekvationer med totalmatriserna $\left[\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{e}_i \end{array}\right]$ en i taget eller alla samtidigt med $\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$.

Med samma resonemang kan vi lösa också andra matrisekvationer $AX = B$ med totalmatrisen $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$. Om denna överförs till reducerad trappstegsform $\left[\begin{array}{c|c} I & C \end{array}\right]$ så är $X = C$.

*forts. kommentar*

Även om den reducerade trappstegsformen inte är av typen $\left[\begin{array}{c|c} I & C \end{array}\right]$ utan mer generellt $\left[\begin{array}{c|c} U & C \end{array}\right]$. Om alla pivotelement i $\left[\begin{array}{c|c} U & C \end{array}\right]$ finns i $U$ så har ekvationen lösning, annars inte. Om varje kolonn i $U$ har pivotelement så är lösningen unik, annars finns det oändligt många lösningar.

**Exempel** Vi löser matrisekvationen $AX = B$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Matrisen $X$ måste vara en $3 \times 2$-matris. Vi bestämmer $X$ med ekvationens totalmatris $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$

Denna är radekvivalent med $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} U & C \end{array}\right]$

Den första kolonnen i $C$ ker oss första kolonnen i $X$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 9-3t \\ -4+t \\ t \end{bmatrix}$.

Den andra kolonnen i $C$ ker oss andra kolonnen i $X$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4-3s \\ -1+s \\ s \end{bmatrix}$.

Notera att vi har olika parametrar, $x_{31} = t$ och $x_{32} = s$.

Ekvationens lösning är alltså $X = \begin{bmatrix} 9-3t & 9-3s \\ -4+t & -4+s \\ t & s \end{bmatrix}$

bild 30

**Sats 8, om inverterbara matrisers egenskaper** Låt $A$ vara en kvadratisk $n \times n$-matris. Då är följande utsagor ekvivalenta. Alltså, för en given matris $A$ är antingen alla sanna eller alla falska.

a. $A$ är en inverterbar matris.

b. $A$ är radekvivalent med $I_n$.

c. $A$ har $n$ pivotpositioner.

bild 31

d. Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har endast den triviala lösningen, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

e. Kolonnerna i $A$ är linjärt oberoende.

f. Den linjära avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ är injektiv.

g. Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^n$.

h. Kolonnerna i $A$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.

bild 32

i. Den linjära avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ är surjektiv.

j. Det finns en $n \times n$-matris $C$ sådan att $CA = I$.

k. Det finns en $n \times n$-matris $D$ sådan att $AD = I$.

l. $A^T$ är en inverterbar matris.

bild 33
Om $A$ och $B$ är kvadratiska och $AB = I$ så kan vi dra slutsatsen att $B = A^{-1}$ och $A = B^{-1}$.
Vi behöver alltså inte kontrollera att också $BA = I$.

bild 34
En linjär transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas inverterbar om det finns en funktion $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sådan att

$$S(T(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x} \quad \text{för alla} \ \ \boldsymbol{x} \text{ i } \mathbb{R}^n$$

$$T(S(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x} \quad \text{för alla} \ \ \boldsymbol{x} \text{ i } \mathbb{R}^n$$

Funktionen $S$ kallas då inversen till $T$ och betecknas $T^{-1}$.
En funktion är inverterbar om och endast om den är både injektiv och surjektiv.
Den kallas då bijektiv.

bild 35

**Sats 9**

Låt $T$ vara en linjär transformation och låt $A$ vara standardmatrisen för $T$. Då är $T$ inverterbar om och endast om $A$ är en inverterbar matris.
I så fall är den linjära avbildningen $S$ som ges av $S(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x}$ den inversa avbildningen till $T$.

bild 36

Notera att om $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ges av $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ så är
$T$ surjektiv om och endast om kolonnerna i $A$ spänner upp $\mathbb{R}^m$ och
injektiv om och endast om kolonnerna i $A$ är linjärt oberoende.
Om $n < m$ kan $T$ inte vara surjektiv, om $n > m$ kan $T$ inte vara injektiv.

bild 37

**Matriser och Matlab** Matriser skrivs in i matlab ungefär som ”för hand”.
Matrisen inramas av ”hak-parenteser”, [ ].
Matriselementen skrivs in radvis.
Elementen på en rad separeras med kommatecken eller mellanslag.
Radbyte görs med semikolon eller genom ett tryck på return-tangenten.
Alla matriser du skriver in bör namnges.

bild 38

**Exempel**

$A = [1, 3, 5; -3, 2, 6]$ ger matrisen

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

bild 39

Några ”bra-att-ha”-matriser.

$\text{eye}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{ones}(2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{zeros}(2, 3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

bild 40
Matriser kan skrivas in som *block* under förutsättning att blocken på samma "rad" innehåller samma antal rader.
A = [zeros(4,3) ones(4);eye(5) ones(5,2)]
är ett exempel på en $9 \times 7$-matris.
Även tidigare definierade och namngivna matriser kan användas.
B = [A;ones(1,7)]
är en $10 \times 7$-matris.

bild 41
Om två matriser har blockindelningar som gör operationerna på blocken möjliga så kan matrisoperationerna utföras "blockvis".