bild 1

Linjär Algebra M/TD Läsvecka 3

Omfattning och Innehåll
Lay: 3.1-3.3 Determinanter. Definition, räkneregler och ett par viktiga satser.
Huitfeldt: 5.2 Lösningsnoggrannhet: vektornorm, matrisnorm
Dugga 12/2 9-11 i V-huset, gäller M, V och Z

bild 2

Mål: Du skall kunna tillämpa satserna om determinanter, t.ex i beviset av Cramers regel, och kunna beräkna determinanten för en matris av godtycklig storlek.
Väsentligt är att acceptera att det finns en enkel regel som gäller tvåradiga matriser, en inte fullt så enkel för treradiga matriser (Sarrus regel) men *ingen enkel regel för större matriser.*
Sats 4 är ett viktigt tillägg till sats 8 i kapitel 2.

bild 3

Determinanten av en 2×2-matris A definieras som

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

bild 4

Determinanter av $n \times n$-matris definieras med hjälp av ”utveckling efter rad 1”
Sats 1 Determinanter kan beräknas genom utveckling efter vilken rad eller kolonn som helst.

bild 5

Om A är en $n \times n$-matris så låter vi A_{ij} beteckna $(n-1) \times (n-1)$-matrisen som vi får om rad i och kolonn j stryks ur A.
Med cofaktor C_{ij} menas $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$
Definitionen av determinant kan då formuleras.

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Kommentar
Observera att jag/vi/boken använt beteckningen A_{ij} tidigare. Dels för enskilt matriselement, dels för delmatris i en blockindelad matris. Lite olyckligt kan man tycka. Å andra sidan är beteckningen "lokal". Vi använder inte beteckningen A_{ij} annat än tillfälligt och kan varje gång tala om vad som avses. Här är det cofaktorerna som är av intresse. Om vi behövt dem frekvent kunde vi hittat på en beteckning som direkt knöt an till A. Det vore "overkill" att införa t.ex. $cof(A)$ för matrisen med element C_ij enligt ovan, eller?

bild 6
Sats 1 säger att:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

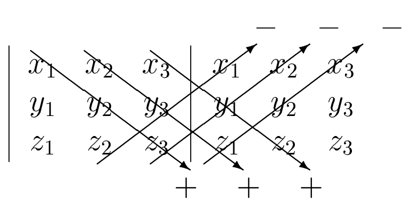
(ovanstående kallas *utveckling efter rad i*.)

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ovanstående kallas *utveckling efter kolonn j*.)

Kommentar
En väg att bevisa sats 1 är att helt enkelt "räkna ut" vilka termer som ingår i determinanten. Då finner man att determinanten av en 3×3-matris är en summa av sex termer, varje term är i sin tur en produkt av tre matriselement, ett element ur varje rad, ett ur varje kolonn. Skriver vi upp dem i ordning a_{1j_1}, a_{1j_2} och a_{1j_3} ser vi att talen $j_1,\ j_2,\ j_3$ är talen 1,2,3 i någon ordning. Tecknet framför termen $a_{1j_1}a_{1j_2}a_{1j_3}$ hängerr samman med denna ordning. Teckenschemat i satsen hänger samman med att denna ordning bryts vid utveckling av determinanten.

bild 7
En 3×3-determinant kan beräknas med Sarrus regel:



$= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1$

bild 8
Determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen.

Kommentar
Den första raden eller den första kolonnen innehåller högst ett element skilt från noll. Utveckla efter denna rad eller kolonn så erhålls en likadan matris men mindre. Upprepning ger satsen.

bild 9
Sats 3 Om B erhålls av A genom en elementär radoperation så gäller

a. En multipel av en rad i A adderas till en annan rad: $\det(B) = \det(A)$

b. Två rader i A byter plats: $\det(B) = -\det(A)$

c. En rad i A multipliceras med en skalär k: $\det(B) = k\det(A)$

Kommentar
De elementära radoperationerna hänger samman med de elementära matriserna. B erhålls av A genom en elementär radoperation om och endast om $B = EA$ där E är en elementär matris. Determinanten av de elementär matriserna är lätt att räkna ut. De som hör till att en multipel av en rad i A adderas till en annan rad har determinant = 1. De som hör till ett platsbyte har determinant -1. De som hör till multiplikation med k har determinant k.
Satsen kan alltså formuleras:
Sats 3' Om $B = EA$ där E är en elementär matris så är $\det(B) = \det(E)\det(A)$.

bild 10
Sats 4
En kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$.

Kommentar
Antag att A är radekvivalent med en trappstegsmatris U. Då vet vi att A är inverterbar om och endast om U har pivotelement i varje rad och varje kolonn. Detta är ekvivalent med att $\det(U) \neq 0$. Upprepad användning av sats 3' ger att $\det(U) \neq 0 \leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

bild 11
Sats 5 Om A är en kvadratisk matris så är $\det(A) = \det(A^T)$.

Kommentar
Av detta följer att en determinant kan förenklas även med kolonnoperationer.

bild 12

Sats 6 Om A och B är $n \times n$-matriser så är

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

.

OBS!! $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ utom i undantagsfall.

Kommentar

satsen är uppenbart sann om A inte är inverterbar. Om A är inverterbar är A en produkt av elementära matriser och satsen följer av upprepad användning av sats 3.

bild 13

Cramers regel Antag att A är en inverterbar $n \times n$-matris. Låt $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Då ges lösningen $\boldsymbol{x}$ till ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ av

$$x_i = \frac{\det(A_i(\boldsymbol{b}))}{\det(A)}, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

Kommentar

Matrisen $A_i(\boldsymbol{b})$ erhålls från A genom att kolonn i ersätts av $\boldsymbol{b}$.

På samma sätt bildas matrisen $I_i(\boldsymbol{x})$ genom att kolonn i ersätts av $\boldsymbol{x}$.

Då är $A \cdot I_i(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & A\boldsymbol{x} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{b} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = A_i(\boldsymbol{b})$.

Alltså är $\det(A) \cdot \det(I_i(\boldsymbol{x})) = \det(A_i(\boldsymbol{b}))$.

$\det(I_i(\boldsymbol{x})) = x_i$ och satsen är bevisad.

bild 14

Sats 8 En formel för inversmatris.

Låt A vara en inverterbar matris. Då är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$$

Kommentar
Adjunkten till A, den till A adjungerade matrisen $\text{adj}(A)$ är matrisen C^T där $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}$.
Med det andra sättet att tänka om beräkning av A^{-1}, kolonnvis beräkning som lösningen till de n ekvationerna $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e_j}$, ger Cramers regel att

$$\text{elementet på position } (i,j) \text{ i } A^{-1} \text{ är } \frac{\det(A_i(\boldsymbol{e}_j))}{\det(A)}$$

Utveckling av $\det(A_i(\boldsymbol{e}_j))$ efter kolonn i ger att $\det(A_i(\boldsymbol{e}_j)) = (-1)^{i+j} \det(A_{ji} = c_{ji}$. Notera ordningen ji som orsakas av att det enda elementen i kolonn kolonn i ur $\det(A_i(\boldsymbol{e}_j))$ är en etta i rad j.

bild 15
Sats 9 Determinanten som area eller volym.
Om A är en 2×2-matris är $\text{abs}(\det(A))$ arean av parallellogrammen som spänns upp av A:s kolonner.
Om A är en 3×3-matris är $\text{abs}(\det(A))$ volymen av parallellepipeden som spänns upp av A:s kolonner.

Kommentar
Denna sats bevisade vi i kursen inledande matematik. Den andra delen genom att beräkna $\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)$ och upptäcka, dels att detta är $\pm$ volymen av parallellepipeden, dels att det kan beräknas med determinanten.
Den första delen följer av den andra genom att $\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

bild 16
Sats 10 Determinanten som area- eller volymskala.
Låt $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ges av $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$.
Låt S vara ett område i $\mathbb{R}^2$ och $T(S)$ bilden av detta område.
Då gäller:

$$\text{arean av } T(S) = \text{abs}(\det(A)) \cdot (\text{arean av } S)$$

Samma gäller om $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ och area ersätts av volym.