bild 1

Linjär Algebra M/TD Läsvecka 4

Omfattning och Innehåll
Lay: 4.1-4.6 Vektorrum
Dugga 12/2 9-11 i V-huset, gäller M. TD efter överenskommelse med Maria
Omfattar kapitel 1, 2 och 3.

bild 2

Mål: 1. Att förstå att många olika fenomen kan ha likartade matematiska egenskaper och att det därför finns skäl att studera dessa egenskaper i en generell situation.
2. Att "kunna" vektorrumsdefinitionen utan att nödvändigtvis kunna räkna upp de tio axiomen.
3. Att kunna ett antal exempel på vektorrum.
4. Att förstå vad som menas med ett underrum i ett vektorrum och inse att dessa ger ytterligare exempel på vektorrum.

bild 3

5. Att kunna bestämma nollrum och kolonnrum till matriser och förstå att dessa har olika tolkningar beroende på vad matrisen representerar.
6. Att förstå begreppen bas, dimension och rang. Kunna bestämma bas för nollrum och kolonnrum för matriser.
7. Att kunna bestämma koordinater för en vektor relativt en bas $\mathcal{B}$ för ett vektorrum V.
8. Att kunna växla mellan olika baser för ett vektorrum V.
9. Att kunna alla egenskaper hos en matris som är ekvivalenta med att matrisen är inverterbar.

bild 4

Ett vektorrum är en icke-tom mängd V vars objekt kallas vektorer, försedd med två operationer. dels addition av vektorerna, dels multiplikation av en vektor med en skalär.
Nedanstående räknelagar (axiom) måste gälla för alla vektorer $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ och för alla skalärer c och d.

bild 5

a. Summan av $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ är ett objekt i V

b. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

c. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

d. Det finns en nollvektor $\mathbf{0}$ i V sådan att $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u}$.

e. Till varje $\boldsymbol{u}$ i V finns en vektor $-\boldsymbol{u}$ i V så att $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$.

bild 6

f. Produkten av $\boldsymbol{u}$ med skalären c, $c\boldsymbol{u}$ är en vektor i V.

g. $c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$

h. $(c+d)\boldsymbol{u}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$

i. $c(d\boldsymbol{u})=(cd)\boldsymbol{u}$

j. $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

bild 7
Exempel
$\mathbb{R}^n$
Geometriska vektorer
Oändliga följder
Polynom av grad högst n
Reellvärda funktioner.

bild 8

Ett **underrum** i ett vektorrum V är en delmängd H av V som har följande tre egenskaper:

a. Nollvektorn i V tillhör H.

b. H är sluten under addition: om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ tillhör H så gör även $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ det.

c. H är sluten under multiplikation med skalär: om $\boldsymbol{u}$ tillhör H och c är en skalär så tillhör även $c\boldsymbol{u}$ H.

bild 9

Sats 1

Om $\boldsymbol{v}_1, \cdots \boldsymbol{v}_p$ tillhör ett vektorrum V så är $\text{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \cdots \boldsymbol{v}_p\}$ ett underrum i V.

bild 10

Definition

Nollrummet till en $m \times n$-matris A, $\text{Nul}(A)$, är mängden av alla lösningar till den homogena ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

$$\text{Nul}(A) = \{\boldsymbol{x} : \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ och } A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

bild 11

Sats 2

Nollrummet till en $m \times n$-matris är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

bild 12

Definition

Kolonnrummet till en $m \times n$-matris A, $\text{Col}(A)$, är mängden av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A.

Om $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ så är

$$\text{Col}(A) = \text{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\}$$

ekvivalent formulerat:

$$\text{Col}(A) = \{\boldsymbol{b} : \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x} \text{ för någon vektor } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

bild 13

Sats 3

Kolonnrummet till en $m \times n$-matris är ett underrum i $\mathbb{R}^m$.

bild 14

Olikheter mellan Nul(A) och Col(A) för en $m \times n$-matris A.

Nul(A)	Col(A)
1. Nul(A) är ett underrum i $\mathbb{R}^n$	1. Col(A) är ett underrum i $\mathbb{R}^m$
2. Nul(A) är implicit definierat av ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$	2. Col(A) är explicit definierat av kolonnvektorerna i A
3. Det tar tid att bestämma vektorer i Nul(A)	3. Det är lätt att hitta vektorer i Col(A)
4. Det finns inget uppenbart samband mellan Nul(A) och elementen i A	4. Det finns ett uppenbart samband mellan Col(A) och elementen i A

bild 15

Nul(A)	Col(A)
5. En typisk vektor $\boldsymbol{v}$ i Nul(A) är sådan att $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$	5. En typisk vektor i Col(A) är sådan att $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ är konsistent.
6. Givet en vektor $\boldsymbol{v}$, så är det enkelt att avgöra om $\boldsymbol{v} \in$ Nul(A)	6. Givet en vektor $\boldsymbol{v}$, så tar det oftast tid att avgöra om $\boldsymbol{v}$ i Col(A)
7. Nul(A) $= \{\mathbf{0}\}$ om och endast om ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ endast har trivial lösning	7. Col(A) $= \mathbb{R}^m$ om och endast om ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har lösning för alla $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$
8.. Nul(A) $= \{\mathbf{0}\}$ om och endast om den linjära avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ är injektiv	8. Col(A) $= \mathbb{R}^m$ om och endast om den linjära avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ är surjektiv

bild 16

definition

En **linjär avbildning** T
från ett vektorrum V till ett vektorrum W
är en regel som till varje vektor $\boldsymbol{x} \in V$ ordnar
en entydigt bestämd vektor $T(\boldsymbol{x}) \in W$ sådan att

(i) $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ för alla $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in V$

(ii) $T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u})$ för alla $\boldsymbol{u} \in V$ och alla skalärer c

bild 17

Kärnan till en linjär avbildning $T : V \longrightarrow W$ är mängden av alla $\boldsymbol{u} \in V$ sådana att $T(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$.
Värdemängden till T är mängden av alla $\boldsymbol{w} \in W$ som är bild av någon vektor $\boldsymbol{x} \in V$
Om $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ så är kärnan till T samma som nollrummet till A och värdemängden samma som kolonnrummet till A.

bild 18

En mängd av vektorer $\{\boldsymbol{v}_1,\ \cdots\ \boldsymbol{v}_p\}$ i V kallas **linjärt oberoende** om ekvationen

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p = \mathbf{0}$$

endast har trivial lösning, $c_1 = 0,\ c_2 = 0, \cdots, c_p = 0$
Vektorerna kallas **linjärt beroende** om ekvationen ovan har icketrivial lösning.

bild 19

Sats 4

En mängd $\{\boldsymbol{v}_1,\ \cdots\ \boldsymbol{v}_p\}$ bestående av två vektorer eller fler, och där $\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$ är linjärt beroende om och endast om någon av vektorerna $\boldsymbol{v}_j$ (med $j > 1$) är en linjär kombination av vektorerna $\boldsymbol{v}_1,\ \cdots\ \boldsymbol{v}_{j-1}$.

bild 20

Definition

Låt H vara ett underrum i V.
En mängd av vektorer $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ \cdots \ \boldsymbol{b}_p\}$ i V kallas **en bas** för H om

a. $\mathcal{B}$ är en linjärt oberoende mängd

b. Underrummet som spänns av $\mathcal{B}$ är samma som H, alltså

$$H = \text{Span}\{\boldsymbol{b}_1, \ \cdots \ \boldsymbol{b}_p\}$$

bild 21

Sats 10

Om ett vektorrum V har en bas som består av n vektorer så består alla baser för V av precis n vektorer.
Talet n kallas vektorrummets dimension.
Det finns vektorrum som inte spänns upp av ändligt många vektorer. Sådana kallas oändligtdimensionella.

bild 22

Sats 5

Låt $S = \{\boldsymbol{v}_1, \ \cdots \ \boldsymbol{v}_p\}$ vara en mängd av vektorer i V och låt

$$H = \text{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \ \cdots \ \boldsymbol{v}_p\}$$

a. Om en av vektorerna i S, t.ex $\boldsymbol{v}_k$ är en linjärkombination av de övriga så kan den tas bort från S, de återstående spänner också upp H.

b. Om $H \neq \{\mathbf{0}\}$ så är någon delmängd av S en bas för H.

bild 23

Bas för nollrummet till en matris A

Metod: Lös ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Identifiera vektorerna som spänner upp nollrummet.

Sats 6: Bas för kolonnrummet till A

Pivotkolonnerna i A bildar en bas för Col$A$

bild 24

Sats 13: Elementära radoperationer förändrar inte radrummet.
Alltså om $A \sim B$ så är Row$A$ = Row$B$

Bas för radrummet till A

Om $A \sim U$ där U är en trappstegsmatris så är pivotraderna i U en bas för Row$A$.
Om radreduktionen inte krävt omordning av raderna kan man ta pivotraderna i A som bas.

bild 25

Sats

Dimensionen för Row$A$ och Col$A$ är samma som antalet pivotkolonner i A.
Denna dimension kallas **rangen** för A, rank$A$.

bild 26

Sats 7, satsen om entydigt bestämda koordinater

Låt $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ vara en bas för vektorrummet V.
Då finns, till varje vektor $\boldsymbol{x} \in V$, en entydigt bestämd uppsättning skalärer, $c_1, \cdots, c_n$ sådana att

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n$$

bild 27

Definition

Antag att $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ är en bas för vektorrummet V och att $\boldsymbol{x} \in V$.
Koordinaterna för $\boldsymbol{x}$ relativt basen $\mathcal{B}$ är skalärerna $c_1, \cdots, c_n$ sådana att

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n$$

bild 28

Om $c_1, \cdots, c_n$ är $\mathcal{B}$-koordinaterna för $\boldsymbol{x}$ så kallas vektorn i $\mathbb{R}^n$

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

för **koordinatvektorn för $\boldsymbol{x}$ (relativt basen $\mathcal{B}$)**, eller **B-koordinatvektorn för $\boldsymbol{x}$**.

bild 29

Avbildningen $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ som ges av

$$\boldsymbol{x} \mapsto [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

kallas **koordinatavbildningen** bestämd av $\mathcal{B}$.

bild 30

Koordinater i $\mathbb{R}^n$

Antag att $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$. Låt

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

Då är vektorekvationen

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n$$

ekvivalent med

$$\boldsymbol{x} = P_{\mathcal{B}} [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

$P_{\mathcal{B}}$ kallas basbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till standardbasen.

bild 31

Sats 8

Låt $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ vara en bas för vektorrummet V.
Då är koordinatavbildningen $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ som ges av

$$\boldsymbol{x} \mapsto [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

en bijektiv linjär avbildning.
(bijektiv = injektiv och surjektiv = one-to-one och onto)
En bijektiv linjär avbildning kallas en **isomorfism**

bild 32

Sats 15

Låt $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ \cdots, \ \boldsymbol{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \ \cdots, \ \boldsymbol{c}_n\}$ vara baser för vektorrummet V.
Då finns en entydigt bestämd $n \times n$-matris $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ sådan att

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} \, [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

Kolonnerna i $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ är koordinatvektorerna för vektorerna i basen $\mathcal{B}$ relativt basen $\mathcal{C}$.
Alltså

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\boldsymbol{b}_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

bild 33

Låt $\mathcal{E}$ beteckna standardbasen för $\mathbb{R}^n$ och låt $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ \cdots, \ \boldsymbol{b}_n\}$ vara en annan bas för $\mathbb{R}^n$.
Om $\boldsymbol{x}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ så är

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}}$$

och

$$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

bild 34

Basbyte i $\mathbb{R}^n$

Låt $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ \cdots, \ \boldsymbol{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \ \cdots, \ \boldsymbol{c}_n\}$ vara baser för $\mathbb{R}^n$.
Låt

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

och

$$P_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}$$

Då är $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = (P_{\mathcal{C}})^{-1} \, P_{\mathcal{B}}$