bild 1

Linjär Algebra M/TD Läsvecka 5

Omfattning och Innehåll
4.7 Basbyte.
5.1 Egenvärden och egenvektorer.
5.2 Karakteristiska ekvationen.
5.3 Diagonalisering.
5.4 Egenvärden och linjära avbildningar.
5.7 Diagonalisering av sytem av differentialekvationer.

bild 2
Mål:

- Att kunna bestämma koordinater för en vektor relativt en bas $\mathcal{B}$ för ett vektorrum V.
- Att kunna växla mellan olika baser för ett vektorrum V. Sats 15 är central.Att kunna definiera begreppen **egenvektor** och **egenvärde**.
- Att veta vad som menas med karakteristiska ekvationen till en matris och att kunna motivera den.
- Att kunna bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris.

bild 3
Mål:

- Att veta vad som menas med **diagonalisering** av en matris
- Att kunna tillämpa sats 5.
- Att kunna tillämpa sats 8.
- Att kunna tillämpa matrisdiagonalisering på system av differentialekvationer.

bild 4

Definition

Antag att $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ \cdots, \ \boldsymbol{b}_n\}$ är en bas för vektorrummet V och att $\boldsymbol{x} \in V$. **Koordinaterna för $\boldsymbol{x}$ relativt basen $\mathcal{B}$** är skalärerna $c_1, \ \cdots, \ c_n$ sådana att

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n$$

bild 5

Om $c_1, \ \cdots, \ c_n$ är $\mathcal{B}$-koordinaterna för $\boldsymbol{x}$ så kallas vektorn i $\mathbb{R}^n$

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

för **koordinatvektorn för $\boldsymbol{x}$ (relativt basen $\mathcal{B}$)**, eller **B-koordinatvektorn för $\boldsymbol{x}$**.

bild 6

Koordinater i $\mathbb{R}^n$

Antag att $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \ \cdots, \ \boldsymbol{b}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$. Låt

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

Då är vektorekvationen

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n$$

ekvivalent med

$$\boldsymbol{x} = P_{\mathcal{B}}\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

$P_{\mathcal{B}}$ kallas basbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till standardbasen.

bild 7

Sats 15

Låt $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_n\}$ vara baser för vektorrummet V.
Då finns en entydigt bestämd $n \times n$-matris $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ sådan att

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

Kolonnerna i $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ är koordinatvektorerna för vektorerna i basen $\mathcal{B}$ relativt basen $\mathcal{C}$.
Alltså

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\boldsymbol{b}_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

bild 8

Låt $\mathcal{E}$ beteckna standardbasen för $\mathbb{R}^n$ och låt $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ vara en annan bas för $\mathbb{R}^n$.
Om $\boldsymbol{x}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ så är

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{E}}$$

och

$$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

bild 9

Basbyte i $\mathbb{R}^n$

Låt $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_n\}$ vara baser för $\mathbb{R}^n$.
Låt

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

och

$$P_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}$$

Då är $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = (P_{\mathcal{C}})^{-1}\,P_{\mathcal{B}}$

bild 10

En **egenvektor** till en $n \times n$-matris A är en vektor $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ sådan att $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ för någon skalär λ.

En skalär λ kallas ett **egenvärde** till A om det finns en icketrivial lösning $\boldsymbol{x}$ till ekvationen $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.
Varje sådan icketrivial lösning kallas en **egenvektor som hör till egenvärdet** λ.

bild 11

Sats 1

Egenvärdena till en triangulär matris är elementen på huvuddiagonalen.

bild 12

Sats 2

Om $\boldsymbol{v}_1, \cdots \boldsymbol{v}_r$ är egenvektorer till olika egenvärden $\lambda_1, \cdots \lambda_r$ så är $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots \boldsymbol{v}_r\}$ en linjärt oberoende mängd av vektorer.

bild 13

Karakteristiska ekvationen

En skalär λ är ett egenvärde till en $n \times n$-matris A om och endast om λ satisfierar matrisens **karakteristiska ekvation**

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

bild 14

En $n \times n$-matris A kallas diagonaliserbar om A är similär, likvärdig, med en diagonalmatris. Alltså om $A = PDP^{-1}$ för någon inverterbar matris P och någon diagonalmatris D.

bild 15

Sats 5, Diagonaliseringssatsen

En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer.

$A = PDP^{-1}$, eller $P^{-1}AP = D$, där D är en diagonalmatris, om och endast om kolonnerna i P är n linjärt oberoende egenvektorer till A. I så fall är diagonalelementen i D motsvarande egenvärden till A (i samma ordning som egenvektorerna i P).

bild 16

Sats 6.

Om $n \times n$-matrisen A har n olika egenvärden så är A diagonaliserbar.

bild 17

Avbildningsmatrisen till en linjär avbildning $\boldsymbol{T : V \to W}$

Antag att $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots \boldsymbol{b}_n\}$ är en bas för vektorrummet V.
Antag att $\mathcal{C}$ är en bas för vektorrummet W och att $T : V \to W$ är en linjär avbildning.
Bilda matrisen $M = \left[\ [T(\boldsymbol{b}_1)]_{\mathcal{C}} \quad [T(\boldsymbol{b}_2)]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad [T(\boldsymbol{b}_n)]_{\mathcal{C}}\ \right]$.
Då är

$$[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{C}} = M\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

Matrisen M kallas **avbildningsmatrisen för** T **relativt** $\mathcal{B}$ **och** $\mathcal{C}$.

Kommentar

Om $V = \mathbb{R}^n$ och $W = \mathbb{R}^m$ med standardbaser i båda fallen och $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ så är M den vanliga avbildningsmatrisen, standardmatrisen, från kapitel 1.9.
Alltså $M = A$ där $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$.

bild 18

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{x} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\ \ ]_{\mathcal{B}}}"'] & T(\boldsymbol{x}) \arrow[d, "{[\ \ ]_{\mathcal{C}}}"] \\
{[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\text{vänstermultiplikation med}", "M"'] & {[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{C}}}
\end{tikzcd}$$

Diagrammet är *kommutativt*, de två sammansatta funktionerna är lika.

$$[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{C}} = M\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

Kommentar

Avbildningsmatrisen ger upphov till två fundamentala frågor:

1. Givet en linjär avbildning $T : V \to W$ som är enkel att förstå. Geometriskt, verbalt eller på annat sätt. Då kan vi ofta ge en matematisk beskrivning av T i termar av baser som är speciellt lämpade för T.
Dessa baser är kanske inte naturliga för V eller W. Hur hittar vi avbildningsmatrisen för T relativt de naturliga baserna?
2. Givet en linjär avbildning $T : V \to W$ för vilken vi känner avbildningsmatrisen för T relativt baser för V och W.
Hur skall vi hitta baser som är speciellt lämpade för T så att vi kan få en annan förståelse för T?

---

bild 19

Två fundamentala frågor

Antag att vi känner avbildningsmatrisen för $T : V \to W$ relativt baser som är naturliga för T men kanske inte för V eller W. Hur hittar vi avbildningsmatrisen för T relativt andra baser för V och W?
Antag att vi känner avbildningsmatrisen för $T : V \to W$ relativt baser som är naturliga för V och W men kanske inte för T. Hur hittar vi baser för V och W som är naturliga för T och vilket samband gäller mellan avbildningsmatriserna?

---

bild 20

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{x} \arrow[rr, "A", "\text{vänstermultiplikation med}"'] \arrow[d, "P_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & & T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \arrow[d, "P_{\mathcal{C}}^{-1}"] \\
{[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[rr, "\text{vänstermultiplikation med}", "M"'] & & {[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{C}}}
\end{tikzcd}$$

Diagrammet är *kommutativt*, de två matrisprodukterna är lika.

$$A = P_{\mathcal{C}} M P_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Kommentar
Om $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}$ är en bas för $\mathbb{R}^m$ och $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning, så har vi två olika avbildningsmatriser för T.
Dels har vi standardmatrisen A, dels har vi M, avbildningsmatrisen för T relativt $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$.
För dessa har vi om vi betecknar $T(\boldsymbol{x})$ med $\boldsymbol{y}$ att
$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ och $[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{C}} = M\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$.

Men vi har också att $\boldsymbol{x} = P_{\mathcal{B}}\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ och $\boldsymbol{y} = P_{\mathcal{C}}\,[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{C}}$

Alltså har vi att $\boldsymbol{y} = P_{\mathcal{C}}\,[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}}M\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C}}MP_{\mathcal{B}}^{-1}\boldsymbol{x}$.

Matrisprodukten $P_{\mathcal{C}}MP_{\mathcal{B}}^{-1}$ är alltså samma som standardmatrisen A.

Vi ser att varje avbildning kan representeras av oändligt många matriser och varje matris kan representera oändligt många avbildningar. Detta motiverar att man **aldrig** har samma beteckning på avbildning och matris.

Kommentar
Detta resonemang kan generaliseras.
Antag att vi har två olika baser, $\mathcal{B}_1$ och $\mathcal{B}_2$, för vektorrummet V och två baser $\mathcal{C}_1$ och $\mathcal{C}_2$,för vektorrummet W.
Om $T : V \to W$ är en linjär avbildning har vi alltså två avbildningsmatriser för T, dels M_1 relativt $\mathcal{B}_1$ och $\mathcal{C}_1$, dels M_2 relativt $\mathcal{B}_2$ och $\mathcal{C}_2$.
Sambandet mellan dessa matriser ges då av

$$M_2 = {}_{\mathcal{C}_2} \overset{P}{\leftarrow} {}_{\mathcal{C}_1}\ M_1\ {}_{\mathcal{B}_1} \overset{P}{\leftarrow} {}_{\mathcal{B}_2}$$

Endast i undagtagsfall har man behov av detta generella synsätt. Endast fallet $V = W$ behandlas i boken.

bild 21
Avbildningsmatrisen till en linjär avbildning $\boldsymbol{T : V \to V}$
Antag att $T : V \to V$ är en linjär avbildning och att $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots \boldsymbol{b}_n\}$ är en bas för vektorrummet V.
Bilda matrisen $M = \left[\ [T(\boldsymbol{b}_1)]_{\mathcal{B}}\ \ [T(\boldsymbol{b}_2)]_{\mathcal{B}}\ \ \cdots\ \ [T(\boldsymbol{b}_n)]_{\mathcal{B}}\ \right]$.
I detta fall betecknas avbildningsmatrisen M istället $[T]_{\mathcal{B}}$
Vi har alltså

$$[T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\,[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$$

bild 22

Basbyte och linjära avbildningar

Antag att $T : V \to V$ är en linjär avbildning och att $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots \boldsymbol{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots \boldsymbol{c}_n\}$ är baser för vektorrummet V.

Vi har då två avbildningsmatriser, $[T]_{\mathcal{B}}$ och $[T]_{\mathcal{C}}$.

Sambandet mellan dessa ges av

$$[T]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}} \overset{P}{\leftarrow} {}_{\mathcal{C}} \; [T]_{\mathcal{C}} \; {}_{\mathcal{C}} \overset{P}{\leftarrow} {}_{\mathcal{B}}$$

bild 23

Basbyte och linjära avbildningar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Antag att $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning och att $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots \boldsymbol{b}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$.

Vi har då två avbildningsmatriser, $[T]_{\mathcal{B}}$ och Standardmatrisen A.

Sambandet mellan dessa ges av

$$A = P_{\mathcal{B}} \, [T]_{\mathcal{B}} \, P_{\mathcal{B}}^{-1}$$

bild 24

Sats 8 Diagonalmatris-representation av linjär avbildning.
Antag att $A = PDP^{-1}$, där D är en $n \times n$-diagonalmatris. Låt $\mathcal{B}$ vara basen för $\mathbb{R}^n$ som ges av kolonnerna i P.
Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara den linjära avbildningen som ges av $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$.
Då är D avbildningsmatrisen för T relativt basen $\mathcal{B}$.

bild 25

Exempel på tillämning av diagonalisering

En tank, som är fylld med 100 liter 6%-ig saltlösning (volymsprocent) kopplas med rör till en annan tank som är fylld med 50 liter rent vatten.
Man pumpar en liter vätska per sekund från tank ett till tank två och samtidigt med samma hastighet från tank två till tank ett.
Vilka koncentrationer håller tankarna efter t sekunder?