bild 1

Linjär Algebra M/TD Läsvecka 7

Omfattning och Innehåll
7.1 Diagonalisering av symmetriska matriser.
7.2 Kvadratiska former.

bild 2
Mål: Att kunna satserna 1 – 5 i kapitlet, i synnerhet
• Spektralsatsen (sats 3),
• Satsen om huvudaxlar, principalaxlar till kvadratiska former (sats 4) samt
• Satsen om kvadratiska former och egenvärden (sats 5)
samt att kunna tillämpa dessa satser vid problemlösning.

bild 3
Mål:
Att veta vad som menas med
• spektral uppdelning av en matris,
• projektionsmatris och
• begreppen positivt definit, negativt definit, indefinit kvadratisk form.

bild 4
Med en **symmetrisk matris** menas en matris A sådan att $A^T = A$.
Obs! En symmetrisk matris måste vara kvadratisk, men det räcker inte
OBS! I kapitlet menas alltid att A är en reell matris.

bild 5
Sats 3: **Spektralsatsen för reella symmetriska matriser**
Om A är en reell, symmetrisk, $n \times n$-matris så gäller:

a. A har n reella egenvärden om man räknar multiplicitet.

b. För varje egenvärde är egenrummets dimension samma som egenvärdets multiplicitet som rot till karakteristiska ekvationen.

c. Egenrummen är parvis ortogonala, alltså egenvektorer som hör till olika egenvärden är ortogonala.

d. A kan diagonaliseras med en ortogonal matris.

bild 6
Sats 1 = Sats 3 c.

bild 7
Sats 2
A är en reell, symmetrisk, $n \times n$-matris om och endast om A kan diagonaliseras med en ortogonal matris.
Skillnaden på sats 2 och 3d. är att sats 2 säger att symmetriska matriser och **inga andra** kan diagonaliseras med ortogonal matris.

bild 8
Om $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \cdots\ \boldsymbol{u}_n\}$ är en ON-bas av egenvektorer till den symmetriska matrisen A och $\lambda_1\ \cdots\ \lambda_n$ är motsvarande egenvärden så är

$$A = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^T$$

Detta kallas en spektral uppdelning av A

bild 9
Om U har ortogonala kolonner kallas UU^T för en projektionsmatris.
Speciellt kallas $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ för en projektionsmatris om $\|\boldsymbol{u}\| = 1$
Projektionsformeln i sats 10 kap.6 visar att $UU^T\boldsymbol{x}$ är projektionen av $\boldsymbol{x}$ på Col(U).

bild 10
En **kvadratisk form** på $\mathbb{R}^n$ är en funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som ges av ett uttryck $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ där A är en **symmetrisk** matris.
Matrisen A kallas den kvadratiska formens koefficientmatris.

bild 11
Ett basbyte med basbytesmatris $P = P_{\mathcal{B}}$ ger ett koordinat- eller **variabelbyte** $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ där $\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$.
I basen $\mathcal{B}$ ges den kvadratiska formen av en annan matris:

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{y})^T A (P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T (P^T A P) \boldsymbol{y}.$$

Matrisen $P^T AP$ är också symmetrisk. Den kallas för den kvadratiska formens koefficientmatris relativt basen $\mathcal{B}$.

bild 12

Sats 4 Principalaxelsatsen.
Låt A vara en symmetrisk $n \times n$-matris. Låt $\mathcal{B}$ vara en ON-bas av egenvektorer till A. Låt P vara den ortogonala matrisen vars kolonner är vektorerna i $\mathcal{B}$ och låt $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n\}$ vara diagonalmatrisen $D = P^T AP$.
Variabelbytet $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ där $\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ överför då den kvadratiska formen $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ till $\boldsymbol{y}^T D\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.
Kolonnerna i P, som alltså är egenvektorer till A, kallas den kvadratiska formens **principalaxlar**.

bild 13

Definition: En kvadratisk form kallas:

a. **positivt definit** om $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ för alla $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$

b. **negativt definit** om $Q(\boldsymbol{x}) < 0$ för alla $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$

c. **indefinit** om $Q(\boldsymbol{x})$ antar såväl positiva som negativa värden.

d. **positivt semidefinit** om $Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ för alla $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$

e. **negativt semidefinit** om $Q(\boldsymbol{x}) \leq 0$ för alla $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$

bild 14

Sats 5 Kvadratiska former och egenvärden.
Låt A vara en symmetrisk $n \times n$-matris. Då är den kvadratiska formen $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$:

a. positivt definit om och endast om alla egenvärden till A är positiva,

b. negativt definit om och endast om alla egenvärden till A är negativa,

c. indefinit om och endast om A har såväl positiva som negativa egenvärden,

d. positivt semidefinit om och endast om alla egenvärden till A är ≥ 0,

e. negativt semidefinit om och endast om alla egenvärden till A är ≤ 0.