Linjär Algebra M/TD Läsvecka 7

Omfattning och Innehåll
7.2 Kvadratiska former.

tmv165/185 V7, Vt06 bild 1

Mål: Att kunna
- Satsen om huvudaxlar, principalaxlar till kvadratiska former (sats 4) samt
- Satsen om kvadratiska former och egenvärden (sats 5)

samt att kunna tillämpa dessa satser vid problemlösning.

tmv165/185 V7, Vt06 bild 2

Mål:
Att veta vad som menas med begreppen
positivt definit, negativt definit och indefinit kvadratisk form.

tmv165/185 V7, Vt06 bild 3

En **kvadratisk form** på $\mathbb{R}^n$ är en funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som ges av ett uttryck $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ där A är en **symmetrisk** matris.
Matrisen A kallas den kvadratiska formens koefficientmatris.

Lay 7.2, tmv165/185 V7, Vt06 bild 4

Ett basbyte med basbytesmatris $P = P_{\mathcal{B}}$ ger ett koordinat- eller **variabelbyte** $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ där $\mathbf{y} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.
I basen $\mathcal{B}$ ges den kvadratiska formen av en annan matris:

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (P^T AP)\mathbf{y}.$$

Matrisen $P^T AP$ är också symmetrisk. Den kallas för den kvadratiska formens koefficientmatris relativt basen $\mathcal{B}$.

Lay 7.2, tmv165/185 V7, Vt06 bild 5

Sats 4 Principalaxelsatsen.
Låt A vara en symmetrisk $n \times n$-matris. Låt $\mathcal{B}$ vara en ON-bas av egenvektorer till A. Låt P vara den ortogonala matrisen vars kolonner är vektorerna i $\mathcal{B}$ och låt $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n\}$ vara diagonalmatrisen $D = P^T AP$.
Variabelbytet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ där $\mathbf{y} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ överför då den kvadratiska formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ till $\mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.
Kolonnerna i P, som alltså är egenvektorer till A, kallas den kvadratiska formens **principalaxlar**.

Lay 7.2, tmv165/185 V7, Vt06 bild 6

Definition: En kvadratisk form kallas:

a. **positivt definit** om $Q(\mathbf{x}) > 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

b. **negativt definit** om $Q(\mathbf{x}) < 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

c. **indefinit** om $Q(\mathbf{x})$ antar såväl positiva som negativa värden.

d. **positivt semidefinit** om $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

e. **negativt semidefinit** om $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Lay 7.2, tmv165/185 V7, Vt06 bild 7

Sats 5 Kvadratiska former och egenvärden.
Låt A vara en symmetrisk $n \times n$-matris. Då är den kvadratiska formen $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$:

a. positivt definit om och endast om alla egenvärden till A är positiva,

b. negativt definit om och endast om alla egenvärden till A är negativa,

c. indefinit om och endast om A har såväl positiva som negativa egenvärden,

d. positivt semidefinit om och endast om alla egenvärden till A är ≥ 0,

e. negativt semidefinit om och endast om alla egenvärden till A är ≤ 0.

Lay 7.2, tmv165/185 V7, Vt06 bild 8