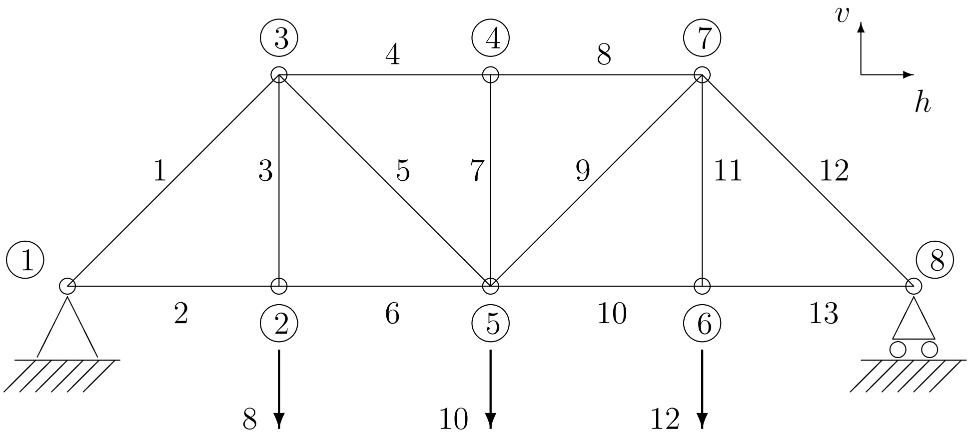
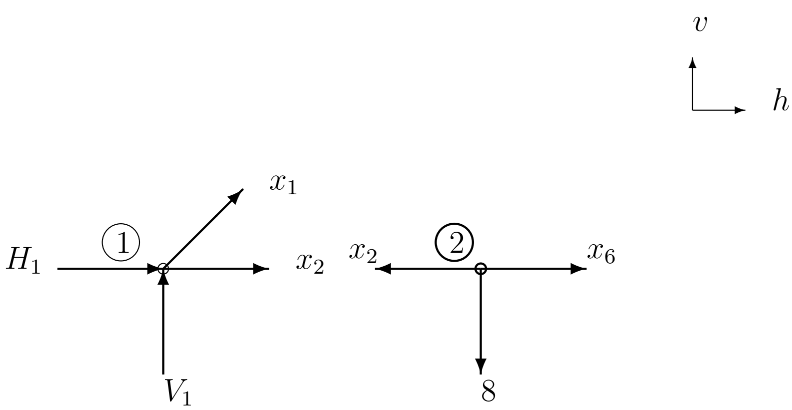
bild 1

Exempel 5.5. Krafterna i de olika grenarna av fackverket i figuren skall bestämmas då angivna yttre krafter är anbringade.



Alla stångkrafter betraktas som dragkrafter. En tryckkraft ses som en negativ dragkraft.
Vid friläggning av fackverket kommer alla stångkrafter att verka ut från noden i riktning längs stången, mot den motsatta noden.

bild 2



Skriver nu ekvationerna, 16 ekvationer med 16 obekanta, på formen

$$A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

där $\mathbf{b}$ innehåller de yttre krafterna och $\mathbf{x}$ de okända krafterna $H_1,\ V_1,\ x_1,\ x_2, x_3, \cdots,\ x_{13}, V_8$
Ekvationerna skrivs i ordningen $1_h,\ 1_v,\ 2_h,\ 2_v$ o.s.v.
Positiv horisontell riktning är åt höger, positiv vertikal riktning är uppåt.

bild 3
Ekvation 1_h är:

$$H_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + x_2 = 0$$

Ekvation 1_v är:

$$V_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 = 0$$

Ekvation 2_h är:

$$-x_2 + x_6 = 0$$

Ekvation 2_v är:

$$x_3 - 8 = 0$$

bild 4
De fyra första raderna i A är alltså:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bild 5
De fyra första raderna i $\mathbf{b}$ är:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

På samma sätt behandlas de övriga noderna och vi får koefficientmatrisen A och de yttre krafterna $\mathbf{b}$. De senare finns med i ekvationerna $2_v,\ 5_v$ och 6_v alltså i ekvationerna 4, 10 och 12.

bild 6

Koefficientmatrisen A är nu en 16×16-matris

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

bild 7

$\mathbf{b}$ innehåller de yttre krafterna som alltså finns med i ekvationerna $2_v,\ 5_v$ och 6_v. Positiv riktning uppåt och åt höger ger

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Då vi skall skriva in matrisen i matlab kan vi välja att skriva in alla de 256 elementen, rad för rad.
Vi kan annars först skapa en 16×16-matris med enbart nollor, A= zeros(16) och därefter ändra de element som är skilda från noll.
A(1,1) = 1/sqrt(2); A(1,2) =1; A(1,14) =1; o.s.v
Ett tredje sätt är att utnyttja att A innehåller många nollor, den är gles.
A= sparse(RAD, KOL, ELEM), ger en gles matris med nollskilda element på de positioner som ges av RAD och KOL.
A=sparse([1,1,1],[1,2,14],[1/sqrt(2),1,1])
ger en matris med ospecificerad storlek som har nollskilda element i första radens första, andra och fjortonde kolonner. Elementen är i tur och ordning $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 1 och 1.
Då man skapar en gles matris från ett konkret problem som vårt kan man behandla en ekvation i taget och skriva in data radvis.

bild 8 EKV1 = [1 1 1/sqrt(2); 1 2 1; 1 14 1].

Gör så för alla ekvationerna och bilda sedan en matris som innehåller alla ekvationsdata (utom de yttre krafterna).

bild 9 Q=[EKV1; EKV2; EKV3; EKV4; EKV5; EKV6; EKV7; EKV8; EKV9; EKV10; EKV11; EKV12; EKV13; EKV14; EKV15; EKV16] (alla 16 namnen måste skrivas in).

Nu innehåller de tre kolonnerna i Q all information som behövs. Första kolonnen innehåller ekvationsnumren, andra innehåller variabelnumret och tredje koefficienten framför variabeln i den aktuella ekvationen.
Vi plockar ut kolonner ur Q genom RAD=Q(:,1), KOL=Q(:,2) och ELEM=Q(:,3).
A= sparse(RAD, KOL, ELEM) ger den önskade koefficientmatrisen.
Vi vill nu lösa ekvationen $AX = B$ där $B = -\mathbf{b}$ och $X = \mathbf{x}$
Detta kan vi göra på flera sätt.
D= rref[A B] ger samma möjlighet som handräkning att avläsa svaret.
X=inv(A)*B ger det entydiga svaret direkt.
Så gör också X = A\B