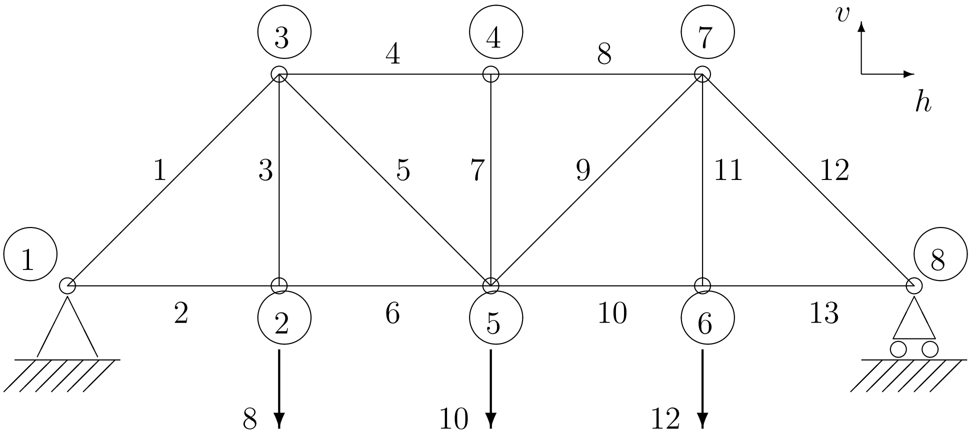
Laboration 1 Linjära ekvationssystem. I kursen Linjär Algebra M, VT 2007

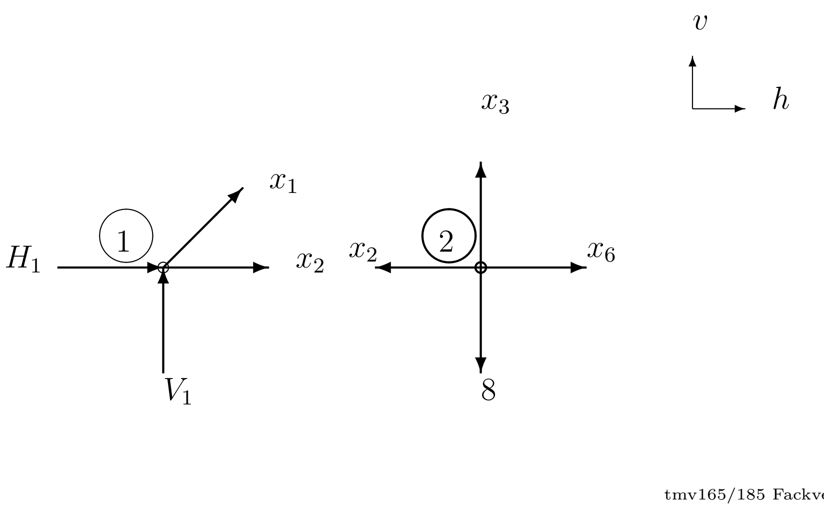
tmv165/185 Fackverk, Vt07 bild 1

Exempel 5.5. Krafterna i de olika grenarna av fackverket i figuren skall bestämmas då angivna yttre krafter är anbringade.



tmv165/185 Fackverk, Vt07 bild 2

Alla stångkrafter betraktas som dragkrafter. En tryckkraft ses som en negativ dragkraft.
Vid friläggning av fackverket kommer alla stångkrafter att verka ut från noden i riktning längs stången, mot den motsatta noden.



tmv165/185 Fackverk, Vt07 bild 3

Vid jämvikt är summan av krafterna i varje nod $\mathbf{0}$. I nod 1 gäller alltså $H_1 \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix} + V_1 \begin{bmatrix} 0, 1 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, 0 \end{bmatrix}$.
I nod 2 har vi $x_2 \begin{bmatrix} -1, 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0, 1 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 0, -1 \end{bmatrix}$.
Notera att riktningsvektorerna för krafterna ges av riktningen för respektive stång och att dessa måste vara enhetsvektorer.
Varje nod ger upphov till två ekvationer, en horisontell och en vertikal. Med åtta noder får man alltså sexton ekvationer. Med tretton stänger och två stöd, varav ett kan röra sig friktionsfritt i horisontell led, har man sexton obekanta. I det rörliga stödet finns ingen horisontell reaktionskraft.

Skriver nu ekvationerna, 16 ekvationer med 16 obekanta, på formen

$$A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

där $\mathbf{b}$ innehåller de yttre krafterna och $\mathbf{x}$ de okända krafterna $H_1,\ V_1,\ x_1,\ x_2, x_3, \cdots,\ x_{13}, V_8$
Ekvationerna skrivs i ordningen $1_h,\ 1_v,\ 2_h,\ 2_v$ o.s.v.
Positiv horisontell riktning är åt höger, positiv vertikal riktning är uppåt.

Ekvation 1_h är:

$$H_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + x_2 = 0$$

Ekvation 1_v är:

$$V_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 = 0$$

Ekvation 2_h är:

$$-x_2 + x_6 = 0$$

Ekvation 2_v är:

$$x_3 - 8 = 0$$

De fyra första raderna i A är alltså:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De fyra första raderna i $\mathbf{b}$ är:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

tmv165/185 Fackverk, Vt07 bild 6

På samma sätt behandlas de övriga noderna och vi får koefficientmatrisen A och de yttre krafterna $\mathbf{b}$. De senare finns med i ekvationerna 2_v, 5_v och 6_v alltså i ekvationerna 4, 10 och 12.

Koefficientmatrisen A är nu en 16×16-matris

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

tmv165/185 Fackverk, Vt07 bild 7

$\mathbf{b}$ innehåller de yttre krafterna som alltså finns med i ekvationerna 2_v, 5_v och 6_v. Positiv riktning uppåt och åt höger ger

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

tmv165/185 Fackverk, Vt07 bild 8

Då vi skall skriva in matrisen i matlab kan vi välja att skriva in alla de 256 elementen, rad för rad.
Vi kan annars först skapa en 16×16-matris med enbart nollor, A= zeros(16) och därefter ändra de element som är skilda från noll.
A(1,1) =1; A(1,3) = 1/sqrt(2); A(1,4) =1; o.s.v
Ett tredje sätt är att utnyttja att A innehåller många nollor, den är gles.
A= sparse(RAD, KOL, ELEM), ger en gles matris med nollskilda element på de positioner som ges av RAD och KOL.
A=sparse([1,1,1],[1,3,4],[1,1/sqrt(2),1])
ger en matris med ospecificerad storlek som har nollskilda element i första radens första, tredje och fjärde kolonner. Elementen är i tur och ordning 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och 1.
Då man skapar en gles matris från ett konkret problem som vårt kan man behandla en ekvation i taget och skriva in data radvis.

EKV1 = [1 1 1; 1 3 4; 1 1/sqrt(2) 1]

tmv165/185 Fackverk, Vt07 bild 9

Gör så för alla ekvationerna och bilda sedan en matris som innehåller alla ekvationsdata (utom de yttre krafterna).

Q=[EKV1; EKV2; EKV3; EKV4; EKV5; EKV6; EKV7; EKV8; EKV9; EKV10; EKV11; EKV12; EKV13; EKV14; EKV15; EKV16] (alla 16 namnen måste skrivas in).

tmv165/185 Fackverk, Vt07 bild 10

Nu innehåller de tre kolonnerna i Q all information som behövs. Första kolonnen innehåller ekvationsnumren, andra innehåller variabelnumret och tredje koefficienten framför variabeln i den aktuella ekvationen.

Vi plockar ut kolonner ur Q genom RAD=Q(:,1), KOL=Q(:,2) och ELEM=Q(:,3).
A= sparse(RAD'; KOL'; ELEM') ger den önskade koefficientmatrisen.

tmv165/185 Fackverk, Vt07 bild 11

Vi vill nu lösa ekvationen $AX = B$ där $B = -\mathbf{b}$ och $X = \mathbf{x}$
Detta kan vi göra på flera sätt.
D= rref[A B] ger samma möjlighet som handräkning att avläsa svaret.
X=inv(A)*B ger det entydiga svaret direkt.
Så gör också X = A\B

tmv165/185 Fackverk, Vt07 bild 12