Linjär Algebra M/TD Läsvecka 1

Omfattning: Lay, kapitel 1.1-1.9, Linjära ekvationer i linjär algebra
Innehåll:
Olika aspekter av linjära ekvationssystem:

skärning mellan geometriska objekt,
linjärkombination av vektorer,
matrisekvation,
linjär avbildning.

tmv165/185 V1, Vt08 bild 1

Mål:
Att behärska eliminationsmetoden.
Att förstå varför metoden leder till ekvivalenta system och vad detta innebär.
Att förstå hur de olika typerna av lösningsmängder uppkommer och hur de kan beskrivas.
Att kunna tillämpa metoden i nya situationer och med variation i tolkningen.

tmv165/185 V1, Vt08 bild 2

Exempel 1 Ett linjärt ekvationssystem:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \end{array}\right.$$

Lay 1.1, tmv165/186 V1, Vt08 bild 3

Elementära radoperationer

1. **Addition** Ersätt en ekvation med summan av den ekvationen och en multipel av en annan ekvation.
2. **Platsbyte** Låt två ekvationer byta plats
3. **Skalning** Multiplicera koefficienterna i en ekvation med en konstant $\neq 0$

Lay 1.1, tmv165/186 V1, Vt08 bild 4

Observation: Elementära radoperationer är reversibla.

Man återfår ”det gamla” ekvationssystemet genom en elementär radoperation på ”det nya”.

De två systemen kallas **radekvivalenta**.

Sats Radekvivalenta ekvationssystem har samma lösningsmängder, de är alltså **ekvivalenta**.

Vi skriver $ES1 \Leftrightarrow ES2$.

Exempel 1 Totalmatrisen (den utökade matrisen) till det linjära ekvationssystemeti exempel 1 är:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Elementära radoperationer på matriser

1. **Addition** Ersätt en rad med summan av raden och en multipel av en annan rad.
2. **Platsbyte** Låt två rader byta plats
3. **Skalning** Multiplicera koefficienterna i en rad med en konstant $\neq 0$

Matriser som erhålls ur varandra genom radoperationer kallas **radekvivalenta**

Vi skriver

$$M_1 \sim M_2$$

Två fundamentala frågor om ekvationssystem

1. Är systemet konsistent, *existerar* någon lösning.
2. Om det finns minst en lösning, är den i så fall *unik, entydig*.

Exempel 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \end{array}\right]$$

Exempel 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 12 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Exempel 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 12 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Exempel 4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 12 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Viktiga begrepp

Trappstegsform (echelon form)
Reducerad trappstegsform (reduced row echelon form, rref)
Pivot position, pivot kolonn

En matris har trappstegsform om:

1. Under en rad med bara nollor finns inget annat än nollor.
2. Det första nollskilda elementet i varje rad är till höger om det första nollskilda elementet i raden ovanför.
3. Under det första nollskilda elementet i en rad (och under nollorna till vänster om detta element) finns endast nollor.

De första nollskilda elementen i en trappstegsformad matris rader kallas **pivotelement**.
En matris i trappstegsform har **reducerad trappstegsform** eller **radreducerad trappstegsform** om dessutom:

4. Alla pivotelement är 1.
5. Över pivotelementen finns bara nollor.

Lay 1.2, tmv165/186 V1, Vt08 bild 12

Vilka av matriserna är i trappstegsform? Reducerad trappstegsform?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lay 1.2, tmv165/186 V1, Vt08 bild 13

Sats 1: Den reducerade trappstegsformens entydighet

Varje matris är radekvivalent med en och endast en (exakt en) reducerad trappstegsmatris.
(Detta är inte alls självklart, beviset kräver en del begrepp och resonemang som dyker upp senare i kursen.)

Definition Om matrisen A är radekvivalent med den reducerade trappstegsmetrisen E så kallas en position i A för *pivotposition* om elementet där svarar mot ett pivotelement i E. En kolonn i A som innehåller en pivotposition kallas en *pivotkolonn.*

Notera att pivotpositionerna inte är entydigt bestämda men att pvotkolonnerna är det.

Sats 2: Existens och entydighet för lösningar till linjära ekvationssystem.
Ett linjärt ekvationssystem är konsistent (har lösning) om och endast om den högra kolonnen i totalmatrisen inte är en pivotkolonn.
Detta är samma som att trappstegsformen inte innehåller en rad av typen:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{där } b \neq 0$$

Ett konsistent system har unik lösning om och endast om alla kolonner utom den högra i totalmatrisen är pivotkolonner.

Viktiga begrepp
Kolonnvektor
Linjärkombination, Linjärt hölje (span)
Linjärt beroende, Linjärt oberoende
Linjär avbildning

Vektorer i $\mathbb{R}^n$ är n-tipler av reella tal, $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ eller skrivna som kolonnmatriser,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ kan uppfattas som punkter eller som vektorer i planet respektive rummet där vi utgår från en ON-bas.

Addition och subtraktion av vektorer samt multiplikation med skalär sker "koordinatvis".
Exempel:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ u_4 + v_4 \end{bmatrix}$$

$$(-1)\mathbf{u} = (-1)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \\ -u_4 \end{bmatrix} = -\mathbf{u}$$

Vanliga räknelagarna gäller.
För alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i $\mathbb{R}^n$ och alla skalärer c och d gäller:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u} & c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v} \\ (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) & (c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u} \\ \mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u} & c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u} \\ \mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0} & 1\mathbf{u}=\mathbf{u} \end{array}$$

En *linjärkombination* av vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\cdots$, $\mathbf{v}_p$ med vikterna c_1, c_2, c_3, $\cdots$, c_p är vektorn $\mathbf{y}$ som ges av:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

Vektorekvationen

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

har samma lösningar som ekvationssystemet vars totalmatris är

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Lay 1.3, tmv165/186 V1, Vt08 bild 21

Mängden av alla linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_p$ kallas *linjära höljet* av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_p$ eller delmängden av $\mathbb{R}^n$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_p$.
Linjära höljet betecknas Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_p\}$

Lay 1.3, tmv165/186 V1, Vt08 bild 22

Matrismultiplikation:
Låt A vara $m \times n$-matrisen $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ där kolonnerna i A är vektorer i $\mathbb{R}^m$.
Låt $\mathbf{x}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Då är produkten $A\mathbf{x}$ linjärkombinationen av kolonnerna i A med vikterna $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Lay 1.4, tmv165/186 V1, Vt08 bild 23

Matrisekvationen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har samma lösningar som vektorekvationen

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

som i sin tur har samma lösningar som ekvationssystemet vars totalmatris är

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Lay 1.4, tmv165/186 V1, Vt08 bild 24

Sats 4
Låt A vara en $m \times n$ matris. Då är följande utsagor logiskt ekvivalenta.
a. För varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ minst en lösning.
b. Varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är linjärkombination av kolonnerna i A.
c. Kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$
d. A har pivotposition i varje rad.

Lay 1.4, tmv165/186 V1, Vt08 bild 25

Sats 5 Om A är en $m \times n$-matris, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$, och c är en skalär, så gäller:

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

och

$$A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$$

Lay 1.4, tmv165/186 V1, Vt08 bild 26

Den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning om och endast om ekvationen har minst en fri variabel.

Lay 1.5, tmv165/186 V1, Vt08 bild 27

Sats 6
Antag att ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsistent för ett visst högerled $\mathbf{b}$ och låt $\mathbf{p}$ vara en lösning. Då är ekvationens lösningsmängd alla vektorer på formen $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ där $\mathbf{v}_h$ är lösning till homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Lay 1.5, tmv165/186 V1, Vt08 bild 28

Mängden av vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ sägs vara *linjärt oberoende* om och endast om vektorekvationen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

endast har trivial lösning.
Mängden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ sägs vara *linjärt beroende* om och endast om vektorekvationen

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

endast har icke-trivial lösning. Alltså om och endast om det finns vikter $c_1, \ c_2, \ \cdots, \ c_p$, som inte alla är noll, men så att

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

Lay 1.7, tmv165/186 V1, Vt08 bild 29

Kolonnerna i en matris A är linjärt oberoende om och endast om ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har trivial lösning.

Lay 1.7, tmv165/186 V1, Vt08 bild 30

Sats 7
En mängd som består av två eller fler vektorer

$$\{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \mathbf{v}_3, \ \cdots, \ \mathbf{v}_p\}$$

är linjärt beroende om och endast om minst en av vektorerna är en linjärkombination av de övriga.

Lay 1.7, tmv165/186 V1, Vt08 bild 31

Sats 8
Varje mängd

$$\{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \mathbf{v}_3, \ \cdots, \ \mathbf{v}_p\}$$

av vektorer i $\mathbb{R}^n$, där p är större än n är linjärt beroende.

Lay 1.7, tmv165/186 V1, Vt08 bild 32

Sats 9 Om en mängd

$$S = \{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \cdots,\ \mathbf{v}_p\}$$

av vektorer i $\mathbb{R}^n$ innehåller nollvektorn, så är mängden linjärt beroende.

Lay 1.7, tmv165/186 V1, Vt08 bild 33

En **funktion** eller **transformation** eller **avbildning** T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är en regel som till varje vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ ordnar en vektor $T(\mathbf{x})$ i $\mathbb{R}^m$.

$\mathbb{R}^n$ kallas funktionens *definitionsmängd* eller *domän.*

$\mathbb{R}^m$ kallas funktionens *codomän* eller *målmängd.*

Beteckningen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ läses " T är en avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$.

Lay 1.8, tmv165/186 V1, Vt08 bild 34

Om A är en $m \times n$-matris så ger varje vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ en vektor $A\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^m$.

Vi har således en avbildning
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Vi kan också skriva
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ges av $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$

Lay 1.8, tmv165/186 V1, Vt08 bild 35

En avbildning T kallas *linjär* om

(i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ för alla $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i T:s domän.

(ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ för alla $\mathbf{u}$ i T:s domän och alla skalära c.

Lay 1.8, tmv165/186 V1, Vt08 bild 36

Antag att A är en $m \times n$-matris.

Matrismultiplikation har då följande egenskaper:

(i) $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ för alla $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$.
(ii) $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$ för alla $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ och alla skalära c.

Slutsats:
$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ som ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$
är en linjär avbildning.

Lay 1.8, tmv165/186 V1, Vt08 bild 37

Sats 10. Matrisen till en linjär avbildning.
Låt $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning.

Då finns en unik matris A sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$. Denna matris kallas standardmatrisen till avbildningen T eller avbildningsmatrisen till T.

Matrisen A är den $m \times n$-matris som bestäms på följande sätt:

Låt $\mathbf{e}_j$ vara den j:te kolonnen i enhetsmatrisen I_n och $\mathbf{a}_j = T(\mathbf{e}_j)$. Då är $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$

Lay 1.9, tmv165/186 V1, Vt08 bild 38

Definition: En avbildning $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kallas *surjektiv* (eng. *onto*), om varje vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är bild av minst en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$.
Värdemängden är i så fall hela $\mathbb{R}^m$.

Lay 1.9, tmv165/186 V1, Vt08 bild 39

Definition: En avbildning $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kallas *injektiv* eller en-entydig (eng. *one-to-one*), om varje vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är bild av högst en vektor $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

Lay 1.9, tmv165/186 V1, Vt08 bild 40

Sats 11 Låt $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då är T injektiv om och endast om ekvationen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ endast har den triviala lösningen.

Senare i kursen kommer mängden $\{\mathbf{x} : T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ kallas *kärnan* (eng. *kernel*) till T eller *nollrummet* (eng. *null space*) till T, skrivs $\mathrm{Ker}(T)$ eller $\mathrm{Nul}(T)$.
Vi har alltså att T är injektiv om och endast om $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$

Lay 1.9, tmv165/186 V1, Vt08 bild 41

Sats 12 Låt $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning och låt A vara standardmatrisen för T. Då gäller:

a. T är *surjektiv*, avbildar $\mathbb{R}^n$ *på, onto* $\mathbb{R}^m$ om och endast om kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$.

b. T är *injektiv, en-entydig, one-to-one* om och endast om kolonnerna i A är linjärt oberoende.