Linjär Algebra M/TD Läsvecka 2

Omfattning och Innehåll
2.1 Matrisoperationer: addition av matriser, multiplikation av matris med skalär, multiplikation av matriser.
2.2 - 2.3 Matrisinvers, karakterisering av inverterbara matriser.
2.4 Blockmatriser
2.5 LU-faktorisering.

tmv165/185 V2, Vt08 bild 1

Mål:
Att behärska matrisoperationerna, (båda sätten att beräkna produkt).
Att veta vilka räknelagar som gäller och vilka som inte gäller.
Att kunna bevisa att $A(BC) = (AB)C$
Att kunna ge exempel som visar att vissa samband inte gäller.

tmv165/185 V2, Vt08 bild 2

Att kunna beräkna matrisinverser.
Att kunna innehållet i sats 8 och kunna motivera de olika ekvivalenserna.
Att kunna räkna med blockmatriser
Att kunna utföra en enkel LU-faktorisering och kunna utnyttja den vid lösning av ekvationssystem.

tmv165/185 V2, Vt08 bild 3

Matriskonventioner
Positionen i rad r och kolonn k kallas position (r, k).
Elementen i en matris A betecknas vanligtvis med a,
elementet på position (r, k) betecknas a_{rk} eller $(A)_{rk}$
Kolonnerna i A betecknas $\mathbf{a}$ med index, eller kol(A) med index.
Raderna i A betecknas rad(A) med index.

Lay 2.1, tmv165/185 V2, Vt08 bild 4

En generell 4×5-matris A kan skrivas på följande sätt:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_2(A) \\ \text{rad}_3(A) \\ \text{rad}_4(A) \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{bmatrix} \text{kol}_1(A) & \text{kol}_2(A) & \text{kol}_3(A) & \text{kol}_4(A) & \text{kol}_5(A) \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix}$$

Matrisoperationer
Addition

Matriser av samma typ kan adderas. Additionen sker genom att elementen på samma positioner adderas. ”Positionsvis addition”.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

Multiplikation med skalär

Alla matriselementen multipliceras med skalären.

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \end{bmatrix}$$

Båda dessa matrisoperationer är ”självklara” då vi tänker på att varje matris kan uppfattas som avbildningsmatris för en linjär avbildning.
Om $T : \mathbb{R}^m \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och $S : \mathbb{R}^m \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ ges av $S(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ så ges summan av funktionerna, $T + S$, av $(T + S)(\mathbf{x}) = (A + B)\mathbf{x}$ och funktionen cT av $cT(\mathbf{x}) = cA\mathbf{x}$

Exempel. Betrakta avbildningen P som geometriskt innebär projektion av vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ på planet $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Eftersom planet går genom origo är detta en linjär avbildning.
Vi erhåller projektionen $P(\mathbf{x})$ genom att dela upp $\mathbf{x}$ i ortogonala komposanter $\mathbf{x} = \mathbf{x_n} + \mathbf{x_n}^{\perp}$ där $\mathbf{x_n}$ är projektionen av $\mathbf{x}$ på planets normal $\mathbf{n}$. Vektorn $\mathbf{x_n}^{\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{n}$ och är den sökta projektionen. Denna beräknas alltså genom $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x_n}^{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x_n}$.
Projektionen av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{n}$ beräknas enklast med projektionsformeln:

$$\mathbf{x_n} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}$$

Planets normal ges av koefficienterna i ekvationen, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Detta ger $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 2x_1 - 2x_2 + x_3$ och $\|\mathbf{n}\|^2 = 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 9$.
Med beteckningen $P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x_n}$ har vi alltså

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{2x_1 - 2x_2 + x_3}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2(2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ -2(2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

På matrisform har vi

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$$

Här ser vi för övrigt också att denna projektion är en linjär avbildning, den ges ju av en matris.

Nu har vi att $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x_n}$.
Sätter vi $Id(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, identitetsavbildningen så ges denna av enhetsmatrisen,I.
Med dessa beteckningar har vi

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x_n} = Id(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (I - A)\mathbf{x}$$

Avbildningsmatrisen för P är alltså

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Multiplikation
Om antalet kolonner i A är samma som antalet rader i B kan produkten AB bildas.
Om A är en $m \times n$ -matris
B är en $n \times p$-matris, $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix}$
så är AB $m \times p$-matrisen
$A\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & A\mathbf{b}_3 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$

Lay 2.1, tmv165/185 V2, Vt08 bild 8

Även matrismultiplikation kan förstås genom att vi tänker på avbildningsmatriser. Om $T : \mathbb{R}^m \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och $S : \mathbb{R}^p \leftrightarrow \mathbb{R}^m$ ges av $S(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ så ges den sammansatta funktionen, $T \circ S$, av $(T \circ S)(\mathbf{x}) = T(S(\mathbf{x})) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$
För att övertyga oss om detta skall vi kontrollera den sista likheten, $A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$. Det är den som avgör om vi har ”rätt” matrismultiplikation.

Skalärprodukt i $\mathbb{R}^n$
Om $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ så är
skalärprodukten av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Lay 2.1, tmv165/185 V2, Vt08 bild 9

Rad-kolonn regeln för beräkning av matrisprodukt
Elementet på position (i, j) i produkten AB är skalärprodukten av rad i ur A med kolonn j ur B,

$$(AB)_{ij} = \text{rad}_i(A)\cdot\text{kol}_j(B)$$

Lay 2.1, tmv165/185 V2, Vt08 bild 10

Denna regel är praktisk vid "huvudräkning". Man beräknar ett element i taget i matrisprodukten, istället för en hel kolonn.

Exempel

Vi önskar beräkna produkten AB då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$C = AB$ är nu en 3×3-matris. Elementet c_{11}på position $(1, 1)$, alltså rad 1 och kolonn 1, är skalärprodukten av rad 1 ur A med kolonn 1 ur B. Vi får $c_{11} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 4 = 19$. Elementet c_{23} i rad 2, kolonn 3, är på samma sätt $2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 12 \cdot (-3) + 4 \cdot 5 = -3$

Sats 2, räknelagar för matrisoperationer. Antag att A, B och C är matriser sådana att nedanstående operationer är möjliga. Då gäller:

a $A(BC) = (AB)C$ (associativ lag för multiplikation)

b $A(B + C) = AB + AC$ (vänsterdistributiva lagen)

c $(B + C)A = BA + CA$ (högerdistributiva lagen)

d $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ för alla skalära r

e $I_m A = A = AI_m$ (Identitetselement för multiplikation)

Lay 2.1, tmv165/185 V2, Vt08 bild 11

VARNING!

1. I allmänhet är $AB \neq BA$
2. Av $AB = AC$ kan man **inte** dra slutsatsen $B = C$.
3. Av $AB = 0$ kan man **inte** dra slutsatsen $A = 0$ eller $B = 0$

Lay 2.1, tmv165/185 V2, Vt08 bild 12

Man kan testa punkt 1. med nästan vilka kvadratiska matriser A och B som helst. Sannolikheten att de skulle uppfylla $AB = BA$ är mycket liten. Som övning kan du undersöka vilka matriser X som uppfyller $AX = XA$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
För att inse att punkt 3. (och därmed också punkt 2.) är sann kan man tänka på att villkoret $AB = 0$ är samma som att raderna i A är ortogonala mot kolonnerna i B vilket ju är lätt att åstadkomma genom kloka val av rader i A och kolonner i B.

Med **transponatet** av en $m \times n$-matris A menas $n \times m$-matrisen A^T vars kolonnvektorer är radvektorerna i A:

$$\text{kol}_i(A^T) = \text{rad}_i(A)$$

Lay 2.1, tmv165/185 V2, Vt08 bild 13

Exempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 12 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Lay 2.1, tmv165/185 V2, Vt08 bild 14

Exempel Om $\mathbf{u}$ är en kolonnvektor, en $n \times 1$-matris, är $\mathbf{u}^T$ motsvarande radvektor.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

skalärprodukten av två kolonnvektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ kan nu skrivas som en matrisprodukt:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

Sats 3 Låt A och B vara matriser sådana att nedanstående operationer är möjliga. Då gäller:

a. $(A^T)^T = A$

b. $(A + B)^T = A^T + B^T$

c. För alla skalära r är $(rA)^T = rA^T$

d. $(AB)^T = B^T A^T$ **Notera ordningen!**

Punkterna a., b. och c. är nog självklart sanna. Punkt d. kan verka överraskande men kolonn-rad regeln för beräkning av produkten förklarar det enkelt. På position (i, j) i $(AB)^T$ hittar vi elementet som finns på position (j, i) i AB. Detta är $\text{rad}_j(A) \cdot \text{kol}_i(B)$. Transponering ger av detta $\text{kol}_j(A^T) \cdot \text{rad}_i(B^T) = \text{rad}_i(B^T) \cdot \text{kol}_j(A^T)$ som ju är elementet på position (i, j) i $B^T A^T$.

En $n \times n$-matris A kallas *inverterbar* om det finns en $n \times n$-matris C sådan att

$$CA = I \text{ och } AC = I$$

där $I = I_n$ är enhetsmatrisen (identity matrix) av typ $n \times n$.
Matrisen C är i så fall entydigt bestämd och kallas inversen till A. Inversen betecknas A^{-1}.

Endast kvadratiska matriser kan ha invers. Om du skriver upp en kvadratisk matris på måfå är det ganska troligt att den är inverterbar.

Notera att om A är **inverterbar** så gäller

2. Av $AB = AC$ kan man dra slutsatsen $B = C$.

3. Av $AB = 0$ kan man dra slutsatsen $B = 0$

Lay 2.2, tmv165/185 V2, Vt08 bild 18

Av $AB = AC$ följer att $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$. Men $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$ och $A^{-1}(AC) = C$. Alltså följer att $B = C$.
Observera att man inte kan dra samma slutsats av $AB = CA$. Multiplikation med A^{-1} ger $A^{-1}(AB) = A^{-1}(CA)$ och som ovan $B = A^{-1}(CA)$. Högerledet är oftast inte samma som C.

Sats 4 Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
Om $ad - bc \neq 0$ är A inverterbar med

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Om $ad - bc = 0$ är A **inte** inverterbar.
Talet $ad - bc$ kallas **determinanten** till A.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Lay 2.2, tmv165/185 V2, Vt08 bild 19

Exempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad \det A = -11, \quad A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = I_2$$

Lay 2.2, tmv165/185 V2, Vt08 bild 20

Sats 5 Om A är en inverterbar $n \times n$-matris så gäller att
för varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$ har ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entydig lösning $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

Lay 2.2, tmv165/185 V2, Vt08 bild 21

Då A är inverterbar har vi att $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Praktiskt att veta men inte så ofta vi utnyttjar det då vi löser ekvationer. Det kräver mer kalkyler att beräkna matrisinvers än att lösa ett ekvationssystem.

Sats 6

a. Om A är en inverterbar matris så är A^{-1} inverterbar och

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

b. Om A och B är inverterbara $n \times n$-matriser så är AB inverterbar och

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \textbf{notera ordningen}$$

c. Om A är en inverterbar matris så är A^T inverterbar och

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Lay 2.2, tmv165/185 V2, Vt08 bild 22

Punkt b. får en förklaring längre fram då vi tittar på inversen till en linjär avbildning.

Med en **elementär matris** menas en matris E som ”utför *en* elementär radoperation”.
Alltså om $A \sim A_1$ via en enda elementär radoperation och $EA = A_1$ så kallas E elementär.

Lay 2.2, tmv165/185 V2, Vt08 bild 23

Det finns tre typer av elementära matriser

Typ 1 som motsvarar att till en rad addera en multipel av en annan rad.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Om $A = \begin{bmatrix} \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_2(A) \\ \text{rad}_3(A) \end{bmatrix}$ så är $E_1 A = \begin{bmatrix} \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_2(A) \\ \text{rad}_3(A) - 4\text{rad}_1(A) \end{bmatrix}$

Lay 2.2, tmv165/185 V2, Vt08 bild 24

Typ 2 som motsvarar att två rader byter plats.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Om $A = \begin{bmatrix} \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_2(A) \\ \text{rad}_3(A) \end{bmatrix}$ så är $E_2 A = \begin{bmatrix} \text{rad}_2(A) \\ \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_3(A) \end{bmatrix}$

Lay 2.2, tmv165/185 V2, Vt08 bild 25

Typ 3 som motsvarar att en rad multipliceras med en skalär $\neq 0$.

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Om $A = \begin{bmatrix} \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_2(A) \\ \text{rad}_3(A) \end{bmatrix}$ så är $E_3 A = \begin{bmatrix} \text{rad}_1(A) \\ \text{rad}_2(A) \\ 5\text{rad}_3(A) \end{bmatrix}$

Lay 2.2, tmv165/185 V2, Vt08 bild 26

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Sats 7
En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om A är radekvivalent med I_n.
I så fall kommer varje följd av radoperationer som överför A till I_n också att överföra I_n till A^{-1}.

Metod för beräkning av A^{-1}
Överför matrisen $\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$ till reducerad trappstegsform.

Om denna är $\left[\begin{array}{c|c} I & B \end{array}\right]$ så är $B = A^{-1}$.

Om man inte får ett pivotelement i samtliga kolonner i A så är A inte inverterbar.

Det finns två sätt att motivera metoden. dels med sats 7, dels genom ett ekvationsresonemang.
Då vi söker A^{-1} söker vi en kvadratisk matris X som uppfyller $AX = I$. Om kolonnerna i X är $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ skall alltså gälla att $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ för $i = 1, 2, \cdots, n$. Vi kan lösa dessa ekvationer med totalmatriserna $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{e}_i \end{array}\right]$ en i taget eller alla samtidigt med $\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$.

Med samma resonemang kan vi lösa också andra matrisekvationer $AX = B$ med totalmatrisen $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$. Om denna överförs till reducerad trappstegsform $\left[\begin{array}{c|c} I & C \end{array}\right]$ så är $X = C$.

Även om den reducerade trappstegsformen inte är av typen $\left[\begin{array}{c|c} I & C \end{array}\right]$ utan mer generellt $\left[\begin{array}{c|c} U & C \end{array}\right]$. Om alla pivotelement i $\left[\begin{array}{c|c} U & C \end{array}\right]$ finns i U så har ekvationen lösning, annars inte. Om varje kolonn i U har pivotelement så är lösningen unik, annars finns det oändligt många lösningar.

Exempel Vi löser matrisekvationen $AX = B$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Matrisen X måste vara en 3×2-matris. Vi bestämmer X med ekvationens totalmatris $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$

Denna är radekvivalent med $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} U & C \end{array}\right]$

Den första kolonnen i C ker oss första kolonnen i X, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 9-3t \\ -4+t \\ t \end{bmatrix}$.

Den andra kolonnen i C ker oss andra kolonnen i X, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4-3s \\ -1+s \\ s \end{bmatrix}$.

Notera att vi har olika parametrar, $x_{31} = t$ och $x_{32} = s$.

Ekvationens lösning är alltså $X = \begin{bmatrix} 9-3t & 9-3s \\ -4+t & -4+s \\ t & s \end{bmatrix}$

Sats 8, om inverterbara matrisers egenskaper Låt A vara en kvadratisk $n \times n$-matris. Då är följande utsagor ekvivalenta. Alltså, för en given matris A är antingen alla sanna eller alla falska.

a. A är en inverterbar matris.

b. A är radekvivalent med I_n.

c. A har n pivotpositioner.

Lay 2.3, tmv165/185 V2, Vt08 bild 30

d. Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast den triviala lösningen, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

e. Kolonnerna i A är linjärt oberoende.

f. Den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är injektiv.

g. Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har minst en lösning för varje $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$.

h. Kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^n$.

i. Den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är surjektiv.

j. Det finns en $n \times n$-matris C sådan att $CA = I$.

k. Det finns en $n \times n$-matris D sådan att $AD = I$.

l. A^T är en inverterbar matris.

Om A och B är kvadratiska och $AB = I$ så kan vi dra slutsatsen att $B = A^{-1}$ och $A = B^{-1}$.
Vi behöver alltså inte kontrollera att också $BA = I$.

En linjär transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas inverterbar om det finns en funktion $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sådan att

$$S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{för alla} \quad \mathbf{x} \text{ i } \mathbb{R}^n$$

$$T(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{för alla} \quad \mathbf{x} \text{ i } \mathbb{R}^n$$

Funktionen S kallas då inversen till T och betecknas T^{-1}.
En funktion är inverterbar om och endast om den är både injektiv och surjektiv.
Den kallas då bijektiv.

Sats 9
Låt T vara en linjär transformation och låt A vara standardmatrisen för T. Då är T inverterbar om och endast om A är en inverterbar matris.
I så fall är den linjära avbildningen S som ges av $S(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$ den inversa avbildningen till T.

Lay 2.3, tmv165/185 V2, Vt08 bild 35

Notera att om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ så är
T surjektiv om och endast om kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$ och
injektiv om och endast om kolonnerna i A är linjärt oberoende.
Om $n < m$ kan T inte vara surjektiv, om $n > m$ kan T inte vara injektiv.

Lay 2.3, tmv165/185 V2, Vt08 bild 36

Matriser och Matlab Matriser skrivs in i matlab ungefär som ”för hand”.
Matrisen inramas av ”hak-parenteser”, [ ].
Matriselementen skrivs in radvis.
Elementen på en rad separeras med kommatecken eller mellanslag.
Radbyte görs med semikolon eller genom ett tryck på return-tangenten.
Alla matriser du skriver in bör namnges.

Lay 2.4, tmv165/185 V2, Vt08 bild 37

Exempel
$A = [1, 3, 5; -3, 2, 6]$ ger matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Lay 2.4, tmv165/185 V2, Vt08 bild 38

Några ”bra-att-ha”-matriser.
$$\text{eye}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{ones}(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{zeros}(2,3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lay 2.4, tmv165/185 V2, Vt08 bild 39

Matriser kan skrivas in som *block* under förutsättning att blocken på samma ”rad” innehåller samma antal rader.
A = [zeros(4,3) ones(4);eye(5) ones(5,2)]
är ett exempel på en 9×7-matris.
Även tidigare definierade och namngivna matriser kan användas.
B = [A;ones(1,7)]
är en 10×7-matris.

Lay 2.4, tmv165/185 V2, Vt08 bild 40

Om två matriser har blockindelningar som gör operationerna på blocken möjliga så kan matrisoperationerna utföras ”blockvis”.

Lay 2.4, tmv165/185 V2, Vt08 bild 41