Linjär Algebra M/TD Läsvecka 3

Omfattning och Innehåll
Lay: 3.1-3.3 Determinanter. Definition, räkneregler och ett par viktiga satser.

Mål: Du skall kunna tillämpa satserna om determinanter, t.ex i beviset av Cramers regel, och vid beräkning av determinanten för en matris av godtycklig storlek. Du skall också kunna använda area- och volymtolkningarna av determinanter.
Väsentligt är att acceptera att det finns en enkel regel som gäller tvåradiga matriser, en inte fullt så enkel för treradiga matriser (Sarrus regel) men *ingen enkel regel för större matriser.*
Sats 4 är ett viktigt tillägg till sats 8 i kapitel 2. Denna bör du kunna bevisa.

Determinanten av e

$$\det(A) =$$

Determinanter av $n \times n$-matris definieras med hjälp av "utveckling efter rad 1"
Sats 1 Determinanter kan beräknas genom utveckling efter vilken rad eller kolonn som helst.

Om A är en $n \times n$-matris så låter vi A_{ij} beteckna $(n-1) \times (n-1)$-matrisen som vi får om rad i och kolonn j stryks ur A.
Med cofaktor C_{ij} menas $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$
Definitionen av determinant kan då formuleras.

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Sats 1 säger att:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ovanstående kallas *utveckling efter rad i.*)

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ovanstående kallas *utveckling efter kolonn j.*)

En 3×3-determinant kan beräknas med Sarrus regel:

$$\begin{array}{cccccc} & & & - & - & - \\ \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \right. & & & \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \right. \\ & & & + & + & + \end{array}$$

$= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1$

Lay 3.1, tmv165/185 V3, Vt08 bild 7

Sats 2 Determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen.

Lay 3.1, tmv165/185 V3, Vt08 bild 8

Sats 3 Om B erhålls av A genom en elementär radoperation så gäller

a. En multipel av en rad i A adderas till en annan rad: $\det(B) = \det(A)$

b. Två rader i A byter plats: $\det(B) = -\det(A)$

c. En rad i A multipliceras med en skalär k: $\det(B) = k\det(A)$

Lay 3.2, tmv165/185 V3, Vt08 bild 9

Sats 4
En kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$

Lay 3.2, tmv165/185 V3, Vt08 bild 10

Sats 5 Om A är en kvadratisk matris så är $\det(A) = \det(A^T)$.

Lay 3.2, tmv165/185 V3, Vt08 bild 11

Sats 6 Om A och B är $n \times n$-matriser så är

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

.
OBS!! $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ utom i undantagsfall.

Lay 3.2, tmv165/185 V3, Vt08 bild 12

Cramers regel Antag att A är en inverterbar $n \times n$-matris. Låt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
Då ges lösningen $\mathbf{x}$ till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ av

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

Lay 3.3, tmv165/185 V3, Vt08 bild 13

Sats 8 En formel för inversmatris.
Låt A vara en inverterbar matris. Då är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$$

Lay 3.3, tmv165/185 V3, Vt08 bild 14

Sats 9 Determinanten som area eller volym.
Om A är en 2×2-matris är abs(det(A)) arean av parallellogrammen som spänns upp av A:s kolonner.
Om A är en 3×3-matris är abs(det(A)) volymen av parallellepipeden som spänns upp av A:s kolonner.

Lay 3.3, tmv165/185 V3, Vt08 bild 15

Sats 10 Determinanten som area- eller volymskala.
Låt $T : \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
Låt S vara ett område i $\mathbb{R}^2$ och $T(S)$ bilden av detta område.
Då gäller:

$$\text{arean av } T(S) = \text{abs}(\det(A)) \cdot (\text{arean av } S)$$

Samma gäller om $T : \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathbb{R}^3$ och area ersätts av volym.

Lay 3.3, tmv165/185 V3, Vt08 bild 16