Linjär Algebra M/TD Läsvecka 4

Omfattning och Innehåll
Lay: 2.8- 2.9, 4.1-4.6 Underrum i $\mathbb{R}^n$, dimension och rang. Vektorrum
Dugga 15/2, 8.30 - 9.00 (TD), 13.45 - 14.15 (M)
Omfattar kapitel 1, 2 och 3.

tmv165/185 V4, Vt08 bild 1

Omätbart mål: Jag vill att ni skall förstå att många olika fenomen kan ha likartade matematiska egenskaper och att det därför finns skäl att studera dessa egenskaper i en generell situation.

tmv165/185 V4, Vt08 bild 2

Mätbara mål: Du skall kunna:

- definiera begreppen underrum i $\mathbb{R}^n$ samt*nollrum* och *kolonnrum* till en matris och förklara sambanden mellan dessa begrepp och ekvationssystems lösningsmängder.
- bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämpligt $\mathbb{R}^n$, bestämma nollrum och kolonnrum till matriser och utnyttja att dessa har olika tolkningar beroende på vad matrisen representerar.
- formulera och bevisa *Rang-satsen.*
- definiera begreppen *linjärt beroende mängd av vektorer*, *linjärt oberoende mängd av vektorer* och *bas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
- definiera begreppet *koordinater för en vektor relativt en bas* och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas.
- tillämpa *Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)* vid problemlösning och förklara varför de olika egenskaperna som nämns i satsen är ekvivalenta.

tmv165/185 V4, Vt08 bild 3

Då du behärskar ovanstående kan du gå vidare med det generella och lära dig:

- vektorrumsdefinitionen (utan att nödvändigtvis kunna räkna upp de tio axiomen) och kunna ge ett antal exempel på vektorrum.
- definiera begreppet underrum i ett vektorrum, kunna avgöra om en given delmångd av ett känt vektorrum är ett underrum och inse att du då har ytterligare exempel på vektorrum.
- bevisa att varje mängd bestående av fler vektorer i ett vektorrum V, än vad som finns i en bas för V, måste vara linjärt beroende.
- definiera begreppet *dimension* för vektorrum.

tmv165/185 V4, Vt08 bild 4

Ett **underrum** i $\mathbb{R}^n$ är en delmängd H av $\mathbb{R}^n$ som har följande tre egenskaper:

a. Nollvektorn i $\mathbb{R}^n$ tillhör H.

b. H är sluten under addition: om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ tillhör H så gör även $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ det.

c. H är sluten under multiplikation med skalär: om $\mathbf{u}$ tillhör H och c är en skalär så tillhör även $c\mathbf{u}$ H.

Lay 2.8, tmv165/185 V4, Vt08 bild 5

Exempel 3

Om $\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_n$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ så är

$$\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \cdots \mathbf{a}_n\}$$

ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

Lay 2.8, tmv165/185 V4, Vt08 bild 6

Definition
Kolonnrummet till en $m \times n$-matris A, $\mathrm{Col}(A)$, är mängden av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A.

Om $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ så är

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \ \cdots \ \mathbf{a}_n\}$$

ekvivalent formulerat:

$$\mathrm{Col}(A) = \{\mathbf{b} : \mathbf{b} = A\mathbf{x} \text{ för någon vektor } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Lay 2.8, tmv165/185 V4, Vt08 bild 7

Definition
Nollrummet till en $m \times n$-matris A, $\mathrm{Nul}(A)$, är mängden av alla lösningar till den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\mathrm{Nul}(A) = \{\mathbf{x} : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ och } A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Sats 12
Nollrummet till en $m \times n$-matris är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

Ekvivalent: Mängden av alla lösningar till ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med m ekvationer och n obekanta, är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

Lay 2.8, tmv165/185 V4, Vt08 bild 8

Olikheter mellan $\mathrm{Nul}(A)$ och $\mathrm{Col}(A)$ för en $m \times n$-matris A.

$\mathrm{Nul}(A)$	$\mathrm{Col}(A)$
1. $\mathrm{Nul}(A)$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$	1. $\mathrm{Col}(A)$ är ett underrum i $\mathbb{R}^m$
2. $\mathrm{Nul}(A)$ är implicit definierat av ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$	2. $\mathrm{Col}(A)$ är explicit definierat av kolonnvektorerna i A
3. Det tar tid att bestämma vektorer i $\mathrm{Nul}(A)$	3. Det är lätt att hitta vektorer i $\mathrm{Col}(A)$
4. Det finns inget uppenbart samband mellan $\mathrm{Nul}(A)$ och elementen i A	4. Det finns ett uppenbart samband mellan $\mathrm{Col}(A)$ och elementen i A

Lay 2.8, tmv165/185 V4, Vt08 bild 9

Nul(A)		Col(A)	
5.	En typisk vektor $\mathbf{v}$ i Nul(A) är sådan att $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$	5.	En typisk vektor i Col(A) är sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ är konsistent.
6.	Givet en vektor $\mathbf{v}$, så är det enkelt att avgöra om $\mathbf{v} \in$ Nul(A)	6.	Givet en vektor $\mathbf{v}$, så tar det oftast tid att avgöra om $\mathbf{v}$ i Col(A)
7.	Nul(A) $= \{\mathbf{0}\}$ om och endast om ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har trivial lösning	7.	Col(A) $= \mathbb{R}^m$ om och endast om ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
8..	Nul(A) $= \{\mathbf{0}\}$ om och endast om den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är injektiv	8.	Col(A) $= \mathbb{R}^m$ om och endast om den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är surjektiv

Definition:

En **bas** för ett underrum H i $\mathbb{R}^n$ är en linjärt oberoende mängd av vektorer i H, som spänner H.

Ekvivalent: En mängd av vektorer $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots \mathbf{b}_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ kallas **en bas** för H om

a. $\mathcal{B}$ är en linjärt oberoende mängd

b. Underrummet som spänns av $\mathcal{B}$ är samma som H, alltså

$$H = \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \cdots \mathbf{b}_p\}$$

Bas för nollrummet till en matris A

Metod: Lös ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Identifiera vektorerna som spänner upp nollrummet.

Sats 13: Bas för kolonnrummet till A

Pivotkolonnerna i A bildar en bas för $\operatorname{Col} A$

Lay 2.8, tmv165/185 V4, Vt08 bild 12

En sats om entydigt bestämda koordinater
Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_p\}$ vara en bas för underrummet H.
Då finns, till varje vektor $\mathbf{x} \in H$, en entydigt bestämd uppsättning skalärer, $c_1, \cdots, c_p$ sådana att

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p$$

Lay 2.9, tmv165/185 V4, Vt08 bild 13

Definition
Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_p\}$ är en bas för underrummet H och att $\mathbf{x} \in H$.
Koordinaterna för x relativt basen $\mathcal{B}$ är skalärerna $c_1, \cdots, c_p$ sådana att

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p$$

vVektorn i $\mathbb{R}^p$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

kallas **koordinatvektorn för x (relativt basen $\mathcal{B}$)**, eller **$\mathcal{B}$-koordinatvektorn för x**.

Lay 2.9, tmv165/185 V4, Vt08 bild 14

Sats 4.5.10
Om ett underrum H i $\mathbb{R}^n$ har en bas, som består av p vektorer, så består alla baser för H av precis p vektorer.
Talet p kallas underrummets **dimension**.
Dimensionen av underrummet $\{\mathbf{0}\}$, som alltså endast innehåller nollvektorn i $\mathbb{R}^n$, har dimensionen 0.

Lay 2.9, tmv165/185 V4, Vt08 bild 15

Definition: Rangen av en matris, Rank A, är kolonnrummets dimension.

Sats 14, Rang-satsen, Dimensionssatsen Om matrisen A har n kolonner

(observera att A inte behöver vara kvadratisk) så gäller

$$\operatorname{Rank} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$$

Lay 2.9, tmv165/185 V4, Vt08 bild 16

Sats 15: Bassatsen Låt H vara ett p-dimensionellt underrum i $\mathbb{R}^n$, $p \geq 1$.

Då är varje linjärt oberoende mängd bestående av exakt p vektorer automatiskt en bas för H.

Varje mängd bestående av exakt p vektorer som spänner upp H är också automatiskt en bas för H.

Lay 2.9, tmv165/185 V4, Vt08 bild 17

Ett vektorrum är en icke-tom mängd V vars objekt kallas vektorer,
försedd med två operationer.
dels addition av vektorerna, dels multiplikation av en vektor med en skalär.
Nedanstående räknelagar (axiom) måste gälla för alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ och för alla skalärer c och d.

a. Summan av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ är ett objekt i V

b. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

c. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

d. Det finns en nollvektor $\mathbf{0}$ i V sådan att $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$.

e. Till varje $\mathbf{u}$ i V finns en vektor $-\mathbf{u}$ i V så att $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$.

f. Produkten av $\mathbf{u}$ med skalären c, $c\mathbf{u}$ är en vektor i V.

g. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$

h. $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$

i. $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$

j. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

Exempel

$\mathbb{R}^n$
Geometriska vektorer
Oändliga följder
Polynom av grad högst n
Reellvärda funktioner.

Ett **underrum** i ett vektorrum V är en delmängd H av V som har följande tre egenskaper:

a. Nollvektorn i V tillhör H.

b. H är sluten under addition: om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ tillhör H så gör även $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ det.

c. H är sluten under multiplikation med skalär: om $\mathbf{u}$ tillhör H och c är en skalär så tillhör även $c\mathbf{u}$ H.

Lay 4.1, tmv165/185 V4, Vt08 bild 20

Sats 1
Om $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_p$ tillhör ett vektorrum V så är Span$\{\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_p\}$ ett underrum i V.

Lay 4.1, tmv165/185 V4, Vt08 bild 21

Definition
En **linjär avbildning** T
från ett vektorrum V till ett vektorrum W
är en funktion med definitionsmängd V och målmängd W,
alltså en regel som till varje vektor $\mathbf{x} \in V$ ordnar
en entydigt bestämd vektor $T(\mathbf{x}) \in W$ sådan att

(i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ för alla $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in V$

(ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ för alla $\mathbf{u} \in V$ och alla skalärer c

Lay 4.2, tmv165/185 V4, Vt08 bild 22

Kärnan till en linjär avbildning $T : V \longrightarrow W$ är mängden av alla $\mathbf{u} \in V$ sådana att $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
Värdemängden till T är mängden av alla $\mathbf{w} \in W$ som är bild av någon vektor $\mathbf{x} \in V$
Om $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ så är kärnan till T samma som nollrummet till A och värdemängden samma som kolonnrummet till A.

Lay 4.2, tmv165/185 V4, Vt08 bild 23

En mängd av vektorer $\{\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_p\}$ i V kallas **linjärt oberoende** om ekvationen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

endast har trivial lösning, $c_1 = 0,\ c_2 = 0, \cdots, c_p = 0$
Vektorerna kallas **linjärt beroende** om ekvationen ovan har icketrivial lösning.

Lay 4.3, tmv165/185 V4, Vt08 bild 24

Sats 4
En mängd $\{\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_p\}$ bestående av två vektorer eller fler, och där $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ är linjärt beroende om och endast om någon av vektorerna $\mathbf{v}_j$ (med $j > 1$) är en linjär kombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_{j-1}$.

Lay 4.3, tmv165/185 V4, Vt08 bild 25

Definition
Låt H vara ett underrum i V.
En mängd av vektorer $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots \mathbf{b}_p\}$ i V kallas **en bas** för H om

a. $\mathcal{B}$ är en linjärt oberoende mängd

b. Underrummet som spänns av $\mathcal{B}$ är samma som H, alltså

$$H = \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \cdots \mathbf{b}_p\}$$

Lay 4.3, tmv165/185 V4, Vt08 bild 26

Sats 5
Låt $S = \{\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_p\}$ vara en mängd av vektorer i V och låt

$$H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_p\}$$

a. Om en av vektorerna i S, t.ex $\mathbf{v}_k$ är en linjärkombination av de övriga så kan den tas bort från S, de återstående spänner också upp H.

b. Om $H \neq \{\mathbf{0}\}$ så är någon delmängd av S en bas för H.

Lay 4.3, tmv165/185 V4, Vt08 bild 27

Sats 7, satsen om entydigt bestämda koordinater
Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ \cdots, \ \mathbf{b}_n\}$ vara en bas för vektorrummet V.
Då finns, till varje vektor $\mathbf{x} \in V$, en entydigt bestämd uppsättning skalärer, $c_1, \ \cdots, \ c_n$ sådana att

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

Definition Skalärerna $c_1, \ \cdots, \ c_n$ sådana att

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

kallas för **koordinaterna för x relativt basen** $\mathcal{B}$

Lay 4.4, tmv165/185 V4, Vt08 bild 28

Om $c_1, \ \cdots, \ c_n$ är $\mathcal{B}$-koordinaterna för $\mathbf{x}$ så kallas vektorn i $\mathbb{R}^n$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

för **koordinatvektorn för x (relativt basen** $\mathcal{B}$**)**, eller $\mathcal{B}$**-koordinatvektorn för x**.

Avbildningen $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ som ges av

$$\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

kallas **koordinatavbildningen** bestämd av $\mathcal{B}$.

Lay 4.4, tmv165/185 V4, Vt08 bild 29

Koordinater i $\mathbb{R}^n$
Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ \cdots, \ \mathbf{b}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$. Låt

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

Då är vektorekvationen

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

ekvivalent med

$$\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

$P_{\mathcal{B}}$ kallas basbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till standardbasen.

Lay 4.4, tmv165/185 V4, Vt08 bild 30

Sats 8
Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ vara en bas för vektorrummet V.
Då är koordinatavbildningen $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ som ges av

$$\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

en bijektiv linjär avbildning.
(bijektiv = injektiv och surjektiv = one-to-one och onto)
En bijektiv linjär avbildning kallas en **isomorfism**

Lay 4.4, tmv165/185 V4, Vt08 bild 31

Sats 9 Om ett vektorrum V har en bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$, så måste varje mängd bestående av fler än n vektorer i V vara linjärt beroende.

Sats 10 Om ett vektorrum V har en bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$, så måste varje bas för V bestå av n vektorer.

Lay 4.5, tmv165/185 V4, Vt08 bild 32

Definition Om V spänns upp av en ändlig mängd av vektorer, så kallas V *ändligtdimensionellt.*

V:s *dimension*, $\dim V$ är antalet vektorer i en bas för V.

Om V endast innehåller nollvektorn $V = \{\mathbf{0}\}$ så är $\dim V = 0$.

Om V inte spänns upp av en ändlig mängd av vektorer, så kallas V *oändligt-dimensionellt.*

Lay 4.5, tmv165/185 V4, Vt08 bild 33

Sats 11 Låt H vara ett underrum i ett ändligtdimensionellt vektorrum V.

Då kan varje linjärt oberoende mängd av vektorer i H , som inte redan spänner upp H, utökas till en bas för H.

Vidare är H också ändligtdimensionellt och

$\dim H \leq \dim V$.

Lay 4.5, tmv165/185 V4, Vt08 bild 34

Sats 12: Bassatsen Låt V vara ett p-dimensionellt vektorrum, $p \geq 1$.

Då är varje linjärt oberoende mängd bestående av exakt p vektorer automatiskt en bas för V.

Varje mängd bestående av exakt p vektorer som spänner upp V är också automatiskt en bas för V.

Lay 4.5, tmv165/185 V4, Vt08 bild 35

$\dim \operatorname{Nul} A$ = antalet fria variabler i ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
$\dim \operatorname{Col} A$ = antalet pivotkolonner i A.

Lay 4.5, tmv165/185 V4, Vt08 bild 36

Radrummet, $\operatorname{Row}(A)$, till en matris A är mängden av alla linjärkombinationer av radvektorerna i A

Sats 13: Elementära radoperationer förändrar inte radrummet.
Alltså om A och B är radekvivalenta, $A \sim B$, så är $\operatorname{Row} A = \operatorname{Row} B$

Bas för radrummet till A
Om $A \sim U$ där U är en trappstegsmatris så är pivotraderna i U en bas för $\operatorname{Row} A$.

Om radreduktionen inte krävt omordning av raderna kan man ta pivotraderna i A som bas.

Lay 4.6, tmv165/185 V4, Vt08 bild 37

Sats
Dimensionen för $\operatorname{Row} A$ och $\operatorname{Col} A$ är samma som antalet pivotkolonner i A.

Definition Denna dimension kallas **rangen** för A, $\operatorname{Rank} A$.

Lay 4.6, tmv165/185 V4, Vt08 bild 38

Sats 14, Rang-satsen, Dimensionssatsen

$$\operatorname{Rank} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$$

Lay 4.6, tmv165/185 V4, Vt08 bild 39