Linjär Algebra M/TD Läsvecka 5

Omfattning och Innehåll
4.7 Basbyte.
5.1 Egenvärden och egenvektorer.
5.2 Karakteristiska ekvationen.
5.3 Diagonalisering.
5.4 Egenvärden och linjära avbildningar.
5.7 Diagonalisering av system av differentialekvationer.

Mål: Du skall kunna:

- bestämma koordinater för en vektor relativt en bas $\mathcal{B}$ för ett vektorrum V.
- växla mellan olika baser för ett vektorrum V. Sats 15 är central.
- definiera begreppen **egenvektor** och **egenvärde**.
- definiera vad som menas med karakteristiska ekvationen till en matris och att kunna motivera den.
- bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris.
- **diagonalisera** en matris
- tillämpa diagonalisering i samband med linjära avbildningar.
- tillämpa matrisdiagonalisering för att lösa system av linjära differentialekvationer.

Definition
Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för vektorrummet V och att $\mathbf{x} \in V$. **Koordinaterna för x relativt basen** $\mathcal{B}$ är skalärerna $c_1, \cdots, c_n$ sådana att

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

Om $c_1, \cdots, c_n$ är $\mathcal{B}$-koordinaterna för $\mathbf{x}$ så kallas vektorn i $\mathbb{R}^n$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

för **koordinatvektorn för x (relativt basen $\mathcal{B}$)**, eller $\mathcal{B}$-koordinatvektorn för $\mathbf{x}$.

Koordinater i $\mathbb{R}^n$

Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$. Låt

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

Då är vektorekvationen

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

ekvivalent med

$$\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

$P_{\mathcal{B}}$ kallas basbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till standardbasen.

Sats 15

Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_n\}$ vara baser för vektorrummet V.

Då finns en entydigt bestämd $n \times n$-matris $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ sådan att

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Kolonnerna i $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ är koordinatvektorerna för vektorerna i basen $\mathcal{B}$ relativt basen $\mathcal{C}$.

Alltså

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} & \cdots & [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

Låt $\mathcal{E}$ beteckna standardbasen för $\mathbb{R}^n$ och låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ vara en annan bas för $\mathbb{R}^n$.
Om $\mathbf{x}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ så är

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$$

och

$$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

Basbyte i $\mathbb{R}^n$
Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_n\}$ vara baser för $\mathbb{R}^n$.
Låt

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

och

$$P_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$$

Då är $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = (P_{\mathcal{C}})^{-1} P_{\mathcal{B}}$

En **egenvektor** till en $n \times n$-matris A är en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sådan att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ för någon skalär λ.

En skalär λ kallas ett **egenvärde** till A om det finns en icketrivial lösning $\mathbf{x}$ till ekvationen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
Varje sådan icketrivial lösning kallas en **egenvektor som hör till egenvärdet** λ.

Sats 1
Egenvärdena till en triangulär matris är elementen på huvuddiagonalen.

Sats 2
Om $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_r$ är egenvektorer till olika egenvärden $\lambda_1, \cdots \lambda_r$ så är $\{\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_r\}$ en linjärt oberoende mängd av vektorer.

Karakteristiska ekvationen
En skalär λ är ett egenvärde till en $n \times n$-matris A om och endast om λ satisfierar matrisens **karakteristiska ekvation**

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Lay 5.2, tmv165/185 V5, Vt08 bild 12

En $n \times n$-matris A kallas diagonaliserbar om A är similär, likvärdig, med en diagonalmatris. Alltså om $A = PDP^{-1}$ för någon inverterbar matris P och någon diagonalmatris D.

Lay 5.2, tmv165/185 V5, Vt08 bild 13

Sats 5, Diagonaliseringssatsen
En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer.

$A = PDP^{-1}$, eller $P^{-1}AP = D$, där D är en diagonalmatris,

om och endast om

kolonnerna i P är n linjärt oberoende egenvektorer till A.

I så fall är diagonalelementen i D motsvarande egenvärden till A (i samma ordning som egenvektorerna i P).

Lay 5.3, tmv165/185 V5, Vt08 bild 14

Sats 6.
Om $n \times n$-matrisen A har n olika egenvärden så är A diagonaliserbar.

Lay 5.3, tmv165/185 V5, Vt08 bild 15

Avbildningsmatrisen till en linjär avbildning $\mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$
Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots \mathbf{b}_n\}$ är en bas för vektorrummet V.
Antag att $\mathcal{C}$ är en bas för vektorrummet W och att $T : V \rightarrow W$ är en linjär avbildning.
Bilda matrisen $M = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} & [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$.
Då är

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = M\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

Matrisen M kallas **avbildningsmatrisen för T relativt $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$**.

Lay 5.4, tmv165/185 V5, Vt08 bild 16

Om $V = \mathbb{R}^n$ och $W = \mathbb{R}^m$ med standardbaser i båda fallen och $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ så är M den vanliga avbildningsmatrisen, standardmatrisen, från kapitel 1.9. Alltså $M = A$ där $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Ett sätt att åskådliggöra likheten $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = M\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ är med ett så kallat *kommutativt* diagram.
I diagrammet ser vi två sätt att beräkna bilden av $\mathbf{x}$, dessa ger samma resultat.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"'] & T(\mathbf{x}) \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{C}}}"] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\text{vänstermultiplikation med}", "M"'] & {[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}}
\end{tikzcd}$$

Två fundamentala frågor

1. Antag att vi känner avbildningsmatrisen för $T : V \to W$ relativt baser som är naturliga för T men kanske inte för V eller W. Hur hittar vi avbildningsmatrisen för T relativt andra baser för V och W?

2. Antag att vi känner avbildningsmatrisen för $T : V \to W$ relativt baser som är naturliga för V och W men kanske inte för T. Hur hittar vi baser för V och W som är naturliga för T och vilket samband gäller mellan avbildningsmatriserna?

Vi ser att avbildningsmatrisen beror av vilka baser vi arbetar med. Detta ger upphov till de två fundamentala frågorna:

1. Givet en linjär avbildning $T : V \to W$ som är enkel att förstå. Geometriskt, verbalt eller på annat sätt. Då kan vi ofta ge en matematisk beskrivning av T i termer av baser som är speciellt lämpade för T.

   Dessa baser är kanske inte naturliga för V eller W och passar kanske inte för hela problemet vi arbetar med. Hur hittar vi avbildningsmatrisen för T relativt de naturliga baserna?

2. Givet en linjär avbildning $T : V \to W$ för vilken vi känner avbildningsmatrisen för T relativt baser för V och W.

   Hur skall vi hitta baser som är speciellt lämpade för T så att vi kan få en annan förståelse för T?

Antag $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ges av matrisen A, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, och M är avbildningsmatrisen för T relativt baser $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^n$ och $\mathcal{C}$ för $\mathbb{R}^m$.

Då är $\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ vilket ger att koordinatavbildningen $[\ \ ]_{\mathcal{B}}$ ges av vänstermultiplikation med $P_{\mathcal{B}}^{-1}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "\text{vänstermultiplikation med}", "A"'] \arrow[d, "P_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\text{vänstermultiplikation med}", "M"'] & {[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}} \arrow[u, "P_{\mathcal{C}}"']
\end{tikzcd}
$$

Ovanstående diagram är således kommutativt och vi har att

$$A = P_{\mathcal{C}} M P_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Lay 5.4, tmv165/185 V5, Vt08 bild 19

Varje avbildning kan representeras av oändligt många matriser och varje matris kan representera oändligt många avbildningar.

Detta motiverar att man **aldrig** har samma beteckning på avbildning och matris.

Avbildningsmatrisen till en linjär avbildning $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$

Antag att $T : V \to V$ är en linjär avbildning och att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots \mathbf{b}_n\}$ är en bas för vektorrummet V.

Bilda matrisen $[T]_{\mathcal{B}} = \left[\ [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} \quad \cdots \quad [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}}\ \right]$.

Vi har då att

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

I detta fall betecknas alltså avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ istället för M.

Basbyte och linjära avbildningar

Antag att $T : V \to V$ är en linjär avbildning och att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots \mathbf{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \cdots \mathbf{c}_n\}$ är baser för vektorrummet V.

Vi har då två avbildningsmatriser, $[T]_{\mathcal{B}}$ och $[T]_{\mathcal{C}}$.

Sambandet mellan dessa ges av

$$[T]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}\overset{P}{\leftarrow}{}_{\mathcal{C}}\ [T]_{\mathcal{C}}\ {}_{\mathcal{C}}\overset{P}{\leftarrow}{}_{\mathcal{B}}$$

Basbyte och linjära avbildningar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Antag att $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning och att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots \mathbf{b}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$.

Vi har då två avbildningsmatriser, $[T]_\mathcal{B}$ och Standardmatrisen A.

Sambandet mellan dessa ges av

$$A = P_\mathcal{B} \, [T]_\mathcal{B} \, P_\mathcal{B}^{-1}$$

Lay 5.4, tmv165/185 V5, Vt08 bild 23

Detta är endast ett specialfall av sambandet $A = P_\mathcal{C} M P_\mathcal{B}^{-1}$ som vi funnit tidigare.

Två matriser är similära, likvärdiga, om och endast om de är avbildningsmatriser för samma linjära avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ men relativt olika baser.

Lay 5.4, tmv165/185 V5, Vt08 bild 24

Två matriser A och M är similära om det finns en inverterbar matris P så att $A = PMP^{-1}$. Matrisen M är då avbildningsmatris för den avbildning som ges av A men relativt den bas som ges av kolonnerna i P.

Sats 8 Diagonalmatris-representation av linjär avbildning.

Antag att $A = PDP^{-1}$, där D är en $n \times n$-diagonalmatris. Låt $\mathcal{B}$ vara basen för $\mathbb{R}^n$ som ges av kolonnerna i P.

Låt $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara den linjära avbildningen som ges av $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

Då är D avbildningsmatrisen för T relativt basen $\mathcal{B}$.

Lay 5.4, tmv165/185 V5, Vt08 bild 25