CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematiska Vetenskaper
Carl-Henrik Fant, Lennart Falk

19 februari 2008

Matematik med Matlab för M, Td, E, Vt 2008.

LAB 3: Felanalys vid lösning av ekvationssystem.

Inledning

När man behandlar ett ekvationssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

är ofta matrisen A och högerledet $\mathbf{b}$ behäftade med fel eller osäkerheter. De data som matas in kan t ex vara resultat av mätningar, vilka har en begränsad noggrannhet. Dessutom kan oftast inte talen representeras exakt i en dator, vilket ger mycket små fel som dock kan förstoras av ett stort antal räkneoperationer. Det system som vi arbetar med har då matrisen $A + \delta A$ och högerledet $\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$ istället för A respektive b. δA och δb betecknar en *störning* (fel) i A respektive $\mathbf{b}$. Den lösning vi får är också försedd med ett fel, $\delta\mathbf{x}$, och är $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$. Vi ska se hur man kan mäta storleken av ett sådant fel; δA är ju en matris, $\delta\mathbf{b}$ och $\delta\mathbf{x}$ är kolonnvektorer. Ett naturligt mått på en kolonnvektor är dess längd, den s k *Euklidiska normen*:

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \mathbf{v}^T\mathbf{v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

Den euklidiska normen av en matris definieras som den maximala skalan i matristransformationen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, dvs

$$\|A\|_2 = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \tag{2}$$

Man kan visa att den euklidiska matrisnormen är kvadratroten ur största egenvärdet till matrisen A^TA.
Andra normer som ofta används är *summanormen*

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

och *maximumnormen*

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |v_i|$$

och motsvarande definition av matrisnorm (byt index 2 mot 1 respektive ∞) i ekvation (2).
I fortsättningen kommer vi att räkna med den euklidiska normen och vi skriver bara $\|\mathbf{v}\|$ och $\|A\|$ istället för $\|\mathbf{v}\|_2$ och $\|A\|_2$.

Låt oss nu renodla situationen: antingen har vi en störning i högerledet eller en störning i matrisen, inte båda samtidigt. Vi antar också att A är en *inverterbar nxn*-matris.
Vi börjar med en störning i högerledet: Vi *vill* lösa

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

men behandlar i själva verket

$$A(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

Härav får vi att felet i lösningen uppfyller

$$A\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b}$$

$$\delta\mathbf{x} = A^{-1}\delta\mathbf{b} \tag{3}$$

Nu vill vi kunna jämföra storleken av störningen i högerledet med storleken av felet i lösningen. Det är då naturligt att uttrycka sambandet mellan de relativa felen

$$\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}, \quad \frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Av definitionen (2) av matrisnorm följer att

$$\|\mathbf{b}\| = \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|A\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

och tillämpat på (3) ger detta

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\|$$

och kombinerar vi de sista olikheterna får vi slutligen

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Produkten $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ kallas *konditionstalet* för matrisen A, och man skriver:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \tag{4}$$

En matris med stort konditionstal sägs vara *illakonditionerad.* Det är önskvärt att om möjligt undvika sådana matriser i ekvationssystem, då små störningar i högerledet kan ge upphov till förhållandevis stora fel i lösningen.

Om vi istället har en störning δA i matrisen med motsvarande fel $\delta\mathbf{x}$ i lösningen, kan vi på liknande sätt härleda en analog feluppskattning:

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \tag{5}$$

Det relativa felet i lösningen får här en något annorlunda utformning.

Laborationsuppgift

Hilbertmatrisen H_n av ordning $n \times n$ har elementen $h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$ och är ett exempel på en särskilt illakonditionerad matris (stort konditionstal). Hilbertmatrisen av ordning 3 är alltså

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Dessutom har MATLAB en funktion **hilb**(n) som genererar denna matris och en funktion **invhilb**(n) som genererar inversen med stor noggrannhet - dess element är heltal! Därför lämpar sig hilbertmatrisen för vår undersökning. För några n, titta på H_n och H_n^{-1} samt konditionstalet $\kappa(H_n)$. Konditionstalet ges i MATLAB av kommandot **cond**. Matrisnormen ges av kommandot **norm**.

1. Rita först en graf som visar hur konditionstalet $\kappa(H_n)$ växer med n. Använd **semilogy** (linlog-skala: linjär i x-led, logaritmisk i y-led).

2. För att förstå att vi har att göra med en lömsk matris, ska vi först göra ett litet experiment som demonstrerar dess känslighet. Tag en Hilbertmatris av måttligt stor ordning, t ex $n = 4$. Välj ett högerled $\mathbf{b}$ och lös systemet $H_n\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genom att använda kommandot **rref**. Pröva också att multiplicera med inversen: $\mathbf{x} = H_n^{-1}\mathbf{b}$ (använd **invhilb(n)**!). Nu "stör" vi matrisen H_n genom att runda av alla dess element till 4 decimaler (kommandot **round** kan utnyttjas). Lös systemet med samma högerled med **rref** och jämför resultatet. Jämför de relativa felen, $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ och $\frac{\|\delta H_n\|}{\|H_n\|}$. Använd uppskattningen (5) för att bestämma det maximala relativa felet som kan uppstå pga dessa små fel i matrisen.

3. Här ska vi se hur beräkningarna i lösningsalgoritmen påverkar resultatet. Felen som uppstår är relaterade till $\kappa(H_n)$. Vi löser ekvationssystemet $H_n\mathbf{x} = \mathbf{b}$ för något värde på n, välj t ex $n = 10$ (ej större!). Tag $\mathbf{b}$ som en slumptalsvektor (**randn** i MATLAB: kommandot $b = randn(n, 1)$ genererar en kolonnvektor med n normalfördelade slumptal - att vi använder denna slumptalsfunktion beror på att den ger både positiva och negativa tal). Jämför de lösningar du får med **rref**, $\boldsymbol{H_n}\backslash\mathbf{b}$, $\boldsymbol{inv(H_n) * b}$ och den exakta lösningen $\mathbf{invhilb}(\mathrm{n}) * \mathbf{b}$.

4. Gör en funktionsfil som för Hilbertmatrisen av ordning n löser systemet $H_n\mathbf{x} = \mathbf{b}$ exakt för ett stort antal, N, slumpvis valda högerled $\mathbf{b}$. Tag också lika många slumpvis valda felvektorer $\mathbf{db}$ och lös systemet $H_n(\mathbf{dx}) = \mathbf{db}$ exakt.
(Observera att $H_n(x + dx) = b + db, \quad H_n x = b \ \Rightarrow \ H_n(dx) = db$). Beräkna sedan

$$\frac{\frac{\|\mathbf{dx}\|}{\|\mathbf{x}\|}}{\frac{\|\mathbf{db}\|}{\|\mathbf{b}\|}}$$

Av alla dessa kvoter skall bara den minsta ($kmin$) och den största ($kmax$) levereras som utdata. Detta ger oss spridningen av kvoterna. Notera att enligt (4) ovan så bör den största kvoten ligga i närheten av konditionstalet.

5. Till sist jämför med hjälp av **semilogy** spridningen [$kmin\ kmax$] gentemot konditionstalet för hilbertmatrisen då n löper mellan 2 och 5. Detta kan göras genom att bygga ut funktionsfilen i föregående uppgift.

Vilka slutsatser kan du dra?
Viken betydelse har N (antalet slumpgenererade högerled)?
Varför måste vi öka N med storleken på H?
Tips för sista frågan: maximalt relativfel antas då $\mathbf{b}$ och $\mathbf{db}$ har var sin speciell riktning i $\mathbb{R}^n$. I själva verket skall $\mathbf{b}$ vara en egenvektor till matrisens största egenvärde, $\mathbf{db}$ skall vara en egenvektor till dess minsta egenvärde.

Detta sista påstående kan du enkelt kontrollera: Med kommandot **[K,L]=eig(H)** får du två matriser, **K** vars kolonner är egenvektorerna till **H** och en diagonalmatris **L** med egenvärdena på diagonalen. Låt **b** vara egenvektor till största egenvärdet, λ_{max}, till H_{10} och **db** egenvektor till det minsta, λ_{min} . Lös systemen $H_{10}(\mathbf{dx}) = \mathbf{db}$ och $H_{10}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ exakt. Beräkna sedan $\frac{\frac{\|\mathbf{dx}\|}{\|\mathbf{x}\|}}{\frac{\|\mathbf{db}\|}{\|\mathbf{b}\|}}$, $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ och konditionstalet för H_{10}.