TMV165/185 Linjär algebra M och TD, vt 08
Vecko–PM läsvecka 4

Lay: 2.8 - 2.9, 4.1 - 4.6 Underrum i $\mathbb{R}^n$, dimension och rang. Vektorrum.

Tonvikten under veckans genomgång kommer att ligga på 2.8 och 2.9 där vi studerar begreppen underrum, bas för underrum, dimension och rang, som preciserar en del vaga idéer vi mött tidigare. Underrum i $\mathbb{R}^3$ är linjer och plan genom origo, dessa har dimension 1 respektive 2, en bas består av en respektive två vektorer som spänner upp linjen/planet. I kapitlet generaliseras detta till högre dimensioner. Särskilt viktigt är nollrum och kolonnrum till matriser. Nollrummet är samma som lösningsmängden till den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kolonnrummet är samma som mängden av alla $\mathbf{b}$ för vilka ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är konsistent. I sats 2.8.12 bevisas att de är underrum och av beviset framgår hur detta hänger samman med matrismultiplikationens linjära egenskaper.
Matrisrang, som är dimensionen för kolonnrummet, är viktigt i vissa tillämpningar, t.ex. inom reglerteknik. Rangsatsen beskriver samspelet mellan dimensioner för nollrum och kolonnrum.

Basbegreppet är oerhört viktigt. Tänk på att en bas är *en mängd av vektorer*. Lite oegentligt talar vi om de enskilda medlemmarna i en bas som *basvektorer* vilket kan ge intrycket att de ensamma har någon speciell egenskap. Så är det inte, varje vektor utom nollvektorn kan ingå i en bas. Det är väsentligt att du lär dig bestämma baser för nollrum och kolonnrum för matriser. Sats 2.8.13 beskriver hur man gör, du bör kunna bevisa den satsen.

Satsen om inverterbara matriser får ytterligare ett par viktiga punkter i detta kapitel. Den borde för övrigt inkludera även sats 3.2.4.

Kapitel 4 innebär en generalisering av 2.8 och 2.9. Kapitlet kan tyckas vara mycket abstrakt men om man konkretiserar och jämför med 2.8-9 så blir det mer gripbart. I övningsuppgifterna handlar det ofta om $\mathbb{R}^n$ och matriser. **Även om du koncentrerar dig på 2.8-9 så bör du lösa en stor del av övningsuppgifterna ur kap.4**. Idén i kapitlet är att ge en sammanhållande teori för fenomen som är olika men har samma grundläggande egenskaper och det är först genom att gå till den allmänna teorin vi kan hantera koordinatbyte riktigt bra. Att detta är viktigt framgick förhoppningsvis av matlabövning 2 som skulle visa att det i många tillämpningar handlar om att välja en bas som är lämplig för det aktuella problemet och sedan växla mellan olika baser med hjälp av *basbytesmatrisen* $P_{\mathcal{B}}$. Ett djupare studium görs i 4.7.

I **4.1** är sats 1 med vars hjälp man oftast enkelt kan visa att en viss mängd är ett underrum i något större vektorrum extra viktig.

Exempel 4.2.8 och 4.2.9 ger intressanta kopplingar till föregående kurs. Liksom för linjära ekvationssystem ges allmän lösning för vissa differentialekvationer av en partikulärlösning och allmänna lösningen till homogena ekvationen. Här får denna analogi en förklaring.

I **4.5** ingår flera viktiga satser: satserna 9 och 10 som ger möjlighet att definiera begreppet dimension, Sats 11 som visar att om H är äkta underrum i V så har H lägre dimension än V och sats 12, bassatsen, som ofta leder till att det kontrollerande räknearbetet kan minskas. Beviset av sats 9 är belysande då det visar hur uttalanden om allmänna vektorrum ofta hänger samman med uttalanden om linjära ekvationssystem.

Mål:

Omätbart mål: Jag vill att ni skall förstå att många olika fenomen kan ha likartade matematiska egenskaper och att det därför finns skäl att studera dessa egenskaper i en generell situation.

Mätbara mål: Du skall kunna:

- definiera begreppen underrum i $\mathbb{R}^n$ samt*nollrum* och *kolonnrum* till en matris och förklara sambanden mellan dessa begrepp och ekvationssystems lösningsmängder.
- bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämpligt $\mathbb{R}^n$, bestämma nollrum och kolonnrum till matriser och utnyttja att dessa har olika tolkningar beroende på vad matrisen representerar.
- formulera och bevisa *Rang-satsen*.
- definiera begreppen *linjärt beroende mängd av vektorer*, *linjärt oberoende mängd av vektorer* och *bas* för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
- definiera begreppet *koordinater för en vektor relativt en bas* och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas.
- tillämpa *Satsen om inverterbara matriser (The invertible Matrix Theorem)* vid problemlösning och förklara varför de olika egenskaperna som nämns i satsen är ekvivalenta.

Då du behärskar ovanstående kan du gå vidare med det generella och lära dig:

- vektorrumsdefinitionen (utan att nödvändigtvis kunna räkna upp de tio axiomen) och kunna ge ett antal exempel på vektorrum.
- definiera begreppet underrum i ett vektorrum, kunna avgöra om en given delmångd av ett känt vektorrum är ett underrum och inse att du då har ytterligare exempel på vektorrum.
- bevisa att varje mängd bestående av fler vektorer i ett vektorrum V, än vad som finns i en bas för V, måste vara linjärt beroende.
- definiera begreppet *dimension* för vektorrum.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
2.8	PP, 1, 3, 7, 9, 15-20, 23, 25	37	21, 22, 27, 31
2.9	PP, 1, 5, 7, 11, 13, 15		17 -26
4.1	PP, 1, 3, 4, 7	11, 13, 15, 19, 35, 36	20, 23, 33, 34
4.2	PP, 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17	21, 31, 37	25, 27, 30, 33, 39
4.3	PP, 3, 4, 9, 10	15, 27, 37, 38	21, 23, 29, 30, 36
4.4	PP, 1, 3, 7, 10	11, 13, 27, 29, 33	15, 19, 23, 25
4.5	PP, 1, 6, 11, 14	21, 33	19, 27, 29, 31
4.6	PP, 1, 3, 5	35	7, 9, 13, 15, 17, 21, 25, 30