

TMV165/185 Linjär algebra M och TD, vt 08

Vecko-PM läsvecka 5

Lay: 4.7 Basbyte i vektorrum, 5.1-5.4, 5.7 Egenvärden och egenvektorer

I avsnitt 4.4 infördes koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ för en vektor \mathbf{x} relativt en bas \mathcal{B} . Målet i 4.7 är att beskriva sambandet mellan en vektors koordinatvektorer relativt två olika baser \mathcal{B} och \mathcal{C} . **Sats 15** säger allt. Beteckningarna är lite jobbiga men samtidigt logiska. Basbytesmatrisen som konverterar \mathcal{B} -koordinater till \mathcal{C} -koordinater betecknas ${}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}}$. Efter som ${}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ är det logiskt att pilen går från \mathcal{B} till \mathcal{C} . Riktningen, från höger till vänster, motiveras också om vi ser på upprepade koordinatbyten, först från \mathcal{B} till \mathcal{C} sedan från \mathcal{C} till \mathcal{D} . det sammansatta koordinatbytet från \mathcal{B} till \mathcal{D} ges av matrisprodukten ${}_{\mathcal{D}}Q_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}}$. En svårighet är att varje matris kan ha flera tolkningar. I avsnitt 5.4 införs begreppet avbildningsmatris för godtycklig linjär avbildning $V \rightarrow W$. Avbildningsmatrisen A överför koordinaterna för en vektor \mathbf{x} i en viss bas för V till koordinaterna för *en annan vektor* $T(\mathbf{x})$ i en bas för W , $A[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}$. Basbytesmatrisen opererar på *olika koordinater för en och samma vektor*, $P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$. Den vänsterriktade pilen i ${}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}}$ kan tjäna till att få oss att tolka matrisen rätt.

Begreppen *egenvektor* och *egenvärde* som introduceras i 5.1 är centrala, såväl i matematik som i många tillämpningar. I många problem, matematiska eller tillämpade, är det väsentligt att bestämma en bas för \mathbb{R}^n bestående av egenvektorer till en matris A . Det första steget är då att lösa matrisens karakteristiska ekvation som nämns i 5.2. Sedan kan man ofta stödja sig på Sats 6 för att bestämma den önskade basen. En viktig tillämpning av detta ges först i 5.3, diagonalisering av matriser och senare då diagonaliseringen utnyttjas i olika tillämpningar. Vi kommer här att behandla avbildningsmatriser för linjära avbildningar 5.4, system av linjära differentialekvationer i 5.7 och kvadratiske former i kapitel 7.

Mål:

Du skall kunna:

- bestämma koordinater för en vektor relativt en bas \mathcal{B} för ett vektorrum V .
- växla mellan olika baser för ett vektorrum V . Sats 15 är central.
- definiera begreppen **egenvektor** och **egenvärde**.
- definiera vad som menas med karakteristiska ekvationen till en matris och att kunna motivera den.
- bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris.
- **diagonalisera** en matris
- tillämpa diagonalisering i samband med linjära avbildningar.
- tillämpa matrisdiagonalisering för att lösa system av linjära differentialekvationer.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
4.7	PP, 1, 3, 5, 7, 10	13, 17, 19	11, 15
5.1	PP, 1, 3, 5, 6, 7, 9	13, 15, 17, 19, 39	21, 25, 27, 29
5.2	PP, 1, 5, 9, 13	17, 18, 27, 30	20, 21, 24
5.3	PP, 1, 3, 5, 7	11, 15, 17, 33	21, 23, 27
5.4	PP, 1, 3, 5	6, 9, 11, 15, 31, 32	21
5.7	1, 3, 5, 6	7, 15, 19	

OBS! Bortse från frågor som berör sänka, källa eller sadelpunkt i 5.7.