TMV165/185 Linjär algebra M och TD, vt 08
Vecko–PM läsvecka 6

Lay: 6.1-6.6 Ortogonalitet, projektion och minstakvadratmetoden 7.1 Reella symmetriska matriser och diagonalisering.

I kapitel **6.1** införs *skalärprodukt, dot product* och *längd*, eller *norm* som kanske är ett bättre namn. Dessa motsvarar skalärprodukt och längd för geometriska vektorer då vektorerna ges i en ON-bas. Begreppet *ortogonalitet* är viktigt. Ortogonala komplementet till ett underrum i $\mathbb{R}^n$ är ett nytt begrepp jämfört med det vi studerade i inledande kursen. Tänk på att ett underrum kan vara t.ex ett plan genom origo. Ortogonala komplementet är i så fall den linje som går genom origo och är vinkelrät mot planet.

I avsnitt **6.2** är målet att definiera vad som menas med en ON-bas, en ortonormerad bas. **Sats 4** säger att ortogonalitet garanterar linjärt oberoende. Sats 5 visar hur lätt det är att bestämma koordinater i en sådan bas. Ännu enklare är det i en ON-bas, då är $x_k = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_k$

Projektionsformeln som ger projektionen av en vektor på en annan ser likadan ut i $\mathbb{R}^n$ som den "gamla" från inledande kursen. Motiveringen till formeln kan emellertid inte se likadan ut eftersom vi inte har några vinklar i $\mathbb{R}^n$. Vi använde projektionsformeln i inledande kursen för att dela upp en vektor i två ortogonala komposanter, den ena med en given riktning och den andra i planet ortogonalt mot denna riktning. En vidareutveckling av denna idé kommer i sats 8 och sats 10 i **6.3**. Begreppet ortogonala matriser som nämns i förbigående i 6.2 kommer att användas mycket i kapitel 7.

I **6.4** ges Gram-Schmidt processen för att stegvis bestämma en ortogonal bas för ett underrum W då man har en annan bas för W. Metoden är enkel, det gäller att i varje steg använda projektionsformeln för att ersätta en basvektor med en som är ortogonal mot de redan bestämda basvektorerna. Gram-Schmidt processen leder till den numeriskt intressanta QR-faktoriseringen av matriser.

I avsnitt **6.5** ges den mycket använda *minstakvadrat-metoden* för att finna *bästa möjliga lösning* till ett ekvationssystem *som saknar lösning.* I synnerhet handlar det då om överbestämda system, sådana med fler ekvationer än obekanta. I Matlab ges denna lösning till ekvationen `Ax = b` av `x=A\b`.

Sats 13 ger metoden i en liten ask. Däremot har kanske inte sats 14 direkt räknemässigt bruk, det viktiga är att veta att om kolonnerna i A är linjärt oberoende så har ekvationen i sats 13 entydig lösning.

I boken definieras *minstakvadrat-felet* som $\|A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\|$ då $\hat{\boldsymbol{x}}$ är minsta-kvadrat lösningen. Ofta använder man istället *kvadratiska medelfelet* som är $\|A\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| / \sqrt{n}$ då n är antalet ekvationer i systemet. I **6.6** tillämpas metoden på t.ex anpassning av linje till mätpunkter. Minsta kvadrat-felet ökar då i allmänhet om man lägger till mätpunkter under det att kvadratiska medelfelet t.o.m. kan minska.

I kapitel **7.1** studeras diagonalisering av reella symmetriska matriser, alltså matriser som uppfyller att $A^T = A$. I avsnittet ges två mycket viktiga satser. Dels sats 2, som säger att de reella symmetriska matriserna, och inga andra, alltid kan diagonaliseras med en ortogonal matris. Väldigt många tillämpningar leder till symmetriska matriser så satsen är mycket användbar. *Spektralsatsen*, sats 3, beskriver situationen mer i detalj och ger hjälp vid problemlösning. Bevisen av satserna i kapitlet ryms inte i kursen, vi får acceptera dem som sanningar. Utöver att man nu väljer en ortonormerad bas av egenvektorer är det ingen väsentlig skillnad på diagonalisering av symmetriska matriser och osymmetriska som behandlades i kapitel 5.3.

Mål:

Du skall kunna:

- beräkna skalärprodukt och norm och behärska räknereglerna för dessa.
- bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$.
- förklara vad som menas med $W^\perp$ om W är ett underrunm i $\mathbb{R}^n$ och kunna bevisa sats 3.
- bevisa att en ortogonal mängd av vektorer är linjärt oberoende.
- förklara vad som menas med en ortonormerad bas och kunna bevisa att koordinaterna ges av $c_j = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{u}_j$.
- förklara vad som menas med en ortogonal matris och kunna bevisa sats 7.
- dela upp en vektor i ortogonala komponenter, en i W och den andra i $W^\perp$ och kunna bevisa sats 8.
- bestämma en ortonormerad bas för underrum i $\mathbb{R}^n$.
- förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning och att kunna tillämpa minstakvadrat-metoden för modellanpassning.
- förklara varför minstakvadrat-lösningarna är lösningar till den normaliserade ekvationen $A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$.
- formulera och använda satserna 1 – 3 i kapitel 7.1, Spektralsatsen (sats 3) är extra viktig.
- förklara vad som menas med spektral uppdelning av en matris och med projektionsmatris.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
6.1	PP, 1, 6, 8, 11	15, 17, 24, 34	19, 26, 29
6.2	PP, 3, 5	9, 17, 21	23, 27, 29
6.3	PP, 1, 3, 5	9 11, 15, 25	21, 23
6.4	PP, 1, 3, 5	9, 11, 13, 15, 24	17, 19, 23
6.5	PP, 1, 3, 5	7, 9, 11, 15	13, 17
6.6	PP, 1, 4	7, 10, 11	
7.1	PP, 1, 2, 4 - 6, 7, 9	15, 17, 24, 37	26, 28, 29