RÖ 4. KRYSSUPPGIFTER

1.3.25. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. Beteckna kolonnerna i A med $\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3$ och låt $W = \text{span}\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3\}$.

a) Finns $\mathbb{b}$ i $\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3\}$? Hur många vektorer finns i $\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3\}$?

b) Finns $\mathbb{b}$ i W? Hur många vektorer finns i W?

c) Visa att $\mathbb{a}_1$ finns i W. (Inga radoperationer behövs)

a) Nej, $\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ och ingen av dessa vektorer är lika med $\mathbb{b}$.

Tre vektorer finns i $\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3\}$

b) $W = \text{span}\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3\} = \{c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + c_3\mathbb{a}_3,\ c_1, c_2, c_3 \text{ konstanter}\}$

Frågan är om det finns några konstanter c_1, c_2 och c_3 så att $\mathbb{b} = c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + c_3\mathbb{a}_3$.

Vi vill alltså lösa

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{eller ekvivalent}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \begin{matrix} 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & 4 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Eftersom vi fått en matris på trappstegsform vet vi att det finns en lösning och alltså att $\mathbb{b} \in W$.

Det finns oändligt många vektorer i W eftersom vi kan välja vilka konstanter c_1, c_2 och c_3 som helst och det finns oändligt många konstanter.

c) om $\mathbb{a}_1$ finns i W gäller att

$$\mathbb{a}_1 = c_1\mathbb{a}_1 + c_2\mathbb{a}_2 + c_3\mathbb{a}_3$$

för några konstanter c_1, c_2, c_3.

Låt $c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow$

$$\mathbb{a}_1 = 1\cdot\mathbb{a}_1 + 0\cdot\mathbb{a}_2 + 0\cdot\mathbb{a}_3 \Rightarrow \mathbb{a}_1 \text{ finns i } W.$$

1.4.16. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Visa att ekvationen $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ inte har en lösning för alla $\mathbb{b}$ och beskriv de $\mathbb{b}$ som systemet har en lösning för.

Vi söker en lösning till den utvidgade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ -2 & 2 & 0 & b_2 \\ 4 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right] \begin{matrix} 2 \quad 4 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & b_2+2b_1 \\ 0 & 7 & 7 & b_3-4b_1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -\frac{1}{2} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2}(b_2+2b_1) \\ 0 & 7 & 7 & b_3-4b_1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -7 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & -b_1-\frac{b_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & b_3+3b_1+\frac{7}{2}b_2 \end{array}\right]$$

Har bara en lösning då $b_3 + \frac{7}{2}b_2 + 3b_1 = 0$.

1.55. Skriv lösningen till
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$
på parameterform.

Radreducera den utvidgade matrisen så långt som möjligt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \cdot 4 \\ \\ \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

nu kan vi inte göra mer $\Rightarrow$ gå tillbaka till ekvationsform

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \text{ fri} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.7.14 Bestäm de värden på h för vilka $\underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}}$ är linjärt beroende.

Linjärt beroende om enda lösningen till

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
är $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \\ -4 & 6 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & h & 0 \end{array}\right] \overset{②\ ④}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 8+h & 0 \end{array}\right] \overset{⑥}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 38+h & 0 \end{array}\right]$$

om $38+h=0 \Leftrightarrow h=-38$ har systemet oändligt många lösningar

$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ och W_1, W_2, W_3 är linjärt beroende.